Fejér Lipót Matematikaverseny
2026/2027. Megyei forduló
Pécsi Janus Pannonius Gimnázium

12. évfolyam technikum / Pontozási útmutató

1. Viktor képzőművészeti kiállítást nyitott. A második napon $1{,}5$*-szer többen mentek el a kiállításra, mint az első napon. Ha az első napon p%-kal, a második napon pedig* $2p$*%-kal többen mentek volna el, mint ahányan az adott napon meglátogatták a kiállítást, akkor a két nap alatt összesen 972 látogató lett volna. Ha viszont az első napon* $2p$*%-kal, a második napon p%-kal több látogató lett volna, mint eredetileg, akkor összesen 963-an látták volna a kiállítást. Hány látogató lett volna, ha mindkét napon* $2p$*%-kal többen lettek volna kíváncsiak a kiállításra?*

Jelölje az első napi látogatók számát x. Ekkor a második napon $1{,}5 \cdot x$ látogató volt. A feladat első feltétele szerint $$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1{,}5 \cdot x \cdot \left(1 + \frac{2p}{100}\right) = 972,$$	2 pont*
amiből a bal oldalon x kiemelése, majd a lehetséges összevonások elvégzése után adódik, hogy (1) $$x \cdot \left(2{,}5 + \frac{4p}{100}\right) = 972.$$	1 pont
A feladat második feltétele alapján $$x \cdot \left(1 + \frac{2p}{100}\right) + 1{,}5 \cdot x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = 963,$$	1 pont*
amiből adódik, hogy (2) $$x \cdot \left(2{,}5 + \frac{7p}{200}\right) = 963.$$	1 pont
Az (1) és (2) egyenletek megfelelő oldalainak hányadosát véve $$\frac{2{,}5 + \frac{4p}{100}}{2{,}5 + \frac{7p}{200}} = \frac{108}{107}.$$	1 pont
A kapott egyenlet ekvivalens átalakításokkal elsőfokú egyenletre visszavezethető, amelynek megoldása $p = 5$.	1 pont
Az (1) egyenletbe visszahelyettesítve $2{,}7 \cdot x = 972$, amiből $x = 360$.	1 pont
Ha mindkét napon 10%-kal többen látogatták volna a kiállítást, akkor összesen $360 \cdot 1{,}1 + 1{,}5 \cdot 360 \cdot 1{,}1 = 990$ látogatója lett volna Viktor kiállításának.	1 pont
Ellenőrzés a szöveg alapján: az első napon 360, a második napon 540 látogató volt. Az első feltétel alapján $360 \cdot 1{,}05 + 540 \cdot 1{,}1 = 972$, a második feltétel alapján $360 \cdot 1{,}1 + 540 \cdot 1{,}05 = 963$.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

*Megjegyzés: Ha a versenyző a *-gal jelölt gondolati egységek közül az egyiket leírta, akkor 2 pontot, amennyiben a második is helyesen rögzítésre került, akkor további 1 pontot kapjon.*

2. *A 334 és a 45454 olyan pozitív egész számok, amelyek pontosan kétféle számjegyet tartalmaznak. Az ilyen tulajdonságokkal rendelkező számot nevezzük* felejthetetlen *számnak. Hány darab négyjegyű* felejthetetlen *szám van?*

A négyjegyű felejthetetlen számokat két csoportba sorolhatjuk. Az egyik csoportban azok a számok vannak, amelyekben az egyik számjegy 3-szor, a másik 1-szer szerepel, a másik csoport számai pedig mindkét különböző számjegyüket kétszer tartalmazzák.	1 pont
Összeszámoljuk azokat a négyjegyű felejthetetlen számokat, amelyekben az egyik számjegyből 3 darab, a másikból 1 darab van. Ha egy ilyen számban szerepel a 0, és abból 3 darab van, akkor az első számjegyét 9-féleképp választhatjuk meg, az utolsó 3 számjegye pedig 0. Az ilyen számok száma tehát 9. Ha a 0-ból 1 darab van, akkor a másik számjegy 9-féleképp választható, a 0 helye pedig 3-féle lehet (egyesek, tízesek, százasok), tehát ilyen számból összesen 27 darab van. Az első csoportba tartozó, 0-t tartalmazó felejthetetlen négyjegyű számok száma tehát 36.	2 pont
A 0-t nem tartalmazó, első csoportba tartozó felejthetetlen számokban azt a számjegyet, amelyből 3 darab van 9-féleképp, a másik számjegyet 8-féleképp választhatjuk meg. Az utóbbi számjegyet 4 helyiértékre rakhatjuk, ezért az ilyen tulajdonságú négyjegyű felejthetetlen számok száma $9 \cdot 8 \cdot 4 = 288$.	2 pont
A másik csoportba azok a számok tartoznak, amelyekben a két különböző számjegy mindegyike kétszer szerepel. Ha az egyik számjegy a 0, akkor a másik számjegyet 9-féleképp választhatjuk, továbbá a két darab 0-t 3-féleképp helyezhetjük el, így a 0-t tartalmazó, második csoportbeli számok száma 27.	2 pont
Ha a 0 nem szerepel a számjegyek között, akkor a két számjegyet $\binom{9}{2} = 36$-féleképp választhatjuk, a kiválasztott számjegyeket pedig $\frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$-féleképp rendezhetjük sorba. Az ilyen tulajdonságú számok száma tehát $36 \cdot 6 = 216$.	2 pont
A négyjegyű felejthetetlen számok száma tehát $36 + 288 + 27 + 216 = 567$.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

3. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.*

$$3^{1+3x-x^2} = \frac{2}{3^{x^2-x}} - \frac{5}{3^{x^2-2x}}$$

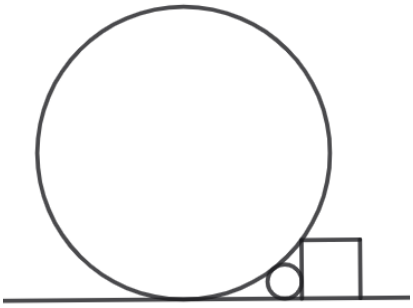
Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Alkalmazzuk a hatványozás azonosságait, így adódik, hogy $$\frac{3^{1+3x}}{3^{x^2}} = \frac{2 \cdot 3^x}{3^{x^2}} - \frac{5 \cdot 3^{2x}}{3^{x^2}},$$	2 pont
amiből mindkét oldalt megszorozva a törtek közös nevezőjével $$3^{1+3x} = 2 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{2x}.$$	1 pont

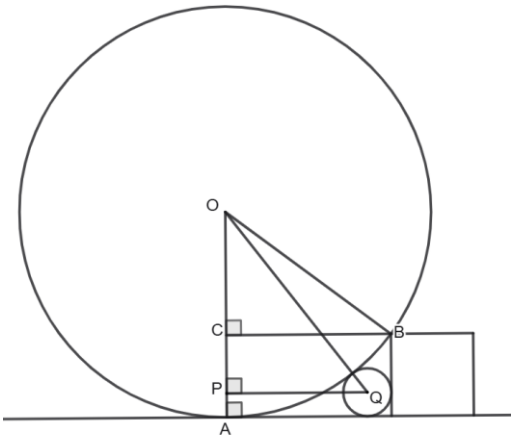
A bal oldalon ismét a hatványozás azonosságait használva $$3 \cdot 3^{3x} = 2 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{2x},$$ majd az $y = 3^x$ helyettesítést bevezetve $$3y^3 = 2y - 5y^2,$$ amiből rendezés után $$3y^3 + 5y^2 - 2y = 0.$$	2 pont
A bal oldalon álló kifejezést szorzattá alakítva $y(3y^2 + 5y - 2) = 0$.	1 pont
A szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért $3y^2 + 5y - 2 = 0$, vagy $y = 0$. A kapott másodfokú egyenlet gyökei $y = -2$, vagy $y = \frac{1}{3}$.	2 pont
Mivel $y = 3^x > 0$, ezért $y = \frac{1}{3}$, amiből $3^x = \frac{1}{3}$, így $x = -1$.	1 pont
A kapott megoldás valóban kielégíti az eredeti egyenletet, amiről behelyettesítéssel meggyőződhetünk.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

4. Egy kör az y-tengelyt az $A(0; a)$ és a $B(0; 2a)$ pontokban metszi, ahol a pozitív egész számot jelöl. Bizonyítsuk be, hogy ha a kör érinti az x-tengelyt, akkor középpontjának valamelyik koordinátája irracionális szám.

A kör középpontja az *AB* szakasz felezőmerőlegesén van. Ebből adódik, hogy a kör középpontjának második koordinátája $\frac{3}{2}a$.	2 pont
A kör érinti az *x*-tengelyt, ezért középpontjának távolsága az *x*-tengelytől megegyezik a kör *r* sugarával, azaz $r = \frac{3}{2}a$.	2 pont
Ha a kör középpontjának első koordinátáját *u* jelöli, akkor a kör egyenlete $$(x-u)^2 + \left(y - \frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{9}{4}a^2.$$	2 pont
Az *A* pont illeszkedik a körre, ezért $$(0-u)^2 + \left(a - \frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{9}{4}a^2,$$ amiből adódik, hogy $u^2 = 2a^2$. Tudjuk, hogy *a* pozitív egész szám, ezért $u = \sqrt{2}a$.	2 pont
A kör középpontja $O\left(\sqrt{2}a; \frac{3}{2}a\right)$. Mivel $\sqrt{2}$ irracionális szám és *a* 0-tól különböző egész szám, ezért a kör középpontjának első koordinátája irracionális.	2 pont
Összesen:	**10 pont**

5. *Az alábbi ábrán látható nagyobb kör sugara 5, a négyzet oldala 2 egység. A négyzet egyik csúcsa illeszkedik a körvonalra, egyik oldala pedig illeszkedik a kör egy érintőjére. Határozzuk meg annak a kisebb körnek a sugarát, amely érinti a 2 egység oldalú négyzet egyik oldalát, az 5 egység sugarú kört, valamint ennek a körnek a négyzet egyik oldalát is tartalmazó érintőjét.*



Követjük az alábbi ábra jelöléseit. A kör középpontját O, érintőjének érintési pontját A, négyzettel közös pontját B, a kisebb kör középpontját Q, a B és Q pontok OA sugárra eső merőleges vetületét C, illetve P jelöli.  	2 pont*
Az OCB derékszögű háromszögben $OC = 3, OB = 5$, így Pitagorasz-tétele alapján $BC^2 = OB^2 - OC^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, amiből $BC = 4$ adódik.	1 pont
Ha a Q középpontú kisebb kör sugarát r jelöli, akkor az OPQ derékszögű háromszög oldalai: $OP = 5 - r, QP = BC - r = 4 - r, OQ = 5 + r$.	2 pont
Az OPQ háromszögben Pitagorasz-tétele alapján $(5 - r)^2 + (4 - r)^2 = (5 + r)^2$,	1 pont
amiből a négyzetre emelések elvégzése után kapjuk, hogy $25 - 10r + r^2 + 16 - 8r + r^2 = 25 + 10r + r^2$,	1 pont
majd 0-ra redukálás és összevonások után $r^2 - 28r + 16 = 0$.	1 pont
A kapott másodfokú egyenlet gyökei $r = 14 - 6 \cdot \sqrt{5}$, illetve $r = 14 + 6 \cdot \sqrt{5}$.	1 pont
Mivel $r < 5$, ezért a keresett érintőkör sugara $r = 14 - 6 \cdot \sqrt{5}$.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

*Megjegyzés: A versenyző a *-gal jelölt pontokból 1 pontot kapjon, ha ábráján az OCB, OPQ derékszögű háromszögek közül egyet bejelöl.*

6. *Egy szabályos 2026 oldalú sokszög minden csúcsához egy-egy pozitív egész számot írtunk úgy, hogy bármely 3 szomszédos csúcshoz írt számok összege ugyanakkora. Az egyik csúcshoz a 2-es számot írtuk. Mennyi a sokszög csúcsaihoz írt számok összegének maximuma?*

A szabályos 2026 oldalú sokszög csúcsaihoz írt számokat (pozitív körüljárási irányt követve) jelölje $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$ úgy, hogy $a_1 = 2$. Ekkor a feltételek szerint $2 + a_2 + a_3 = a_2 + a_3 + a_4$, amiből következik, hogy $a_4 = 2$.	2 pont
A fenti gondolatmenethez hasonlóan $a_2 + a_3 + a_4 = a_3 + a_4 + a_5$, amiből $a_2 = a_5$. Ugyanígy belátható, hogy $a_3 = a_6$.	2 pont
A fenti módszert tovább alkalmazva azt kapjuk, hogy az a_k $(1 \leq k \leq 2026)$ számok 3 periódussal ismétlődnek, pontosabban vannak olyan a és b pozitív egészek, amelyekre $a_{3n+1} = 2, a_{3n+2} = a_2 = a, a_{3n} = b$ $(1 \leq n \leq 675)$.	2 pont
A 2025 hárommal osztható, ezért $a_{2025} = b, a_{2026} = 2$. Ekkor $a_{2025} + a_{2026} + a_1 = a_{2026} + a_1 + a_2$ miatt $a_{2025} = a_2$, így $b = a$.	2 pont
Végül $a_{2025} + a_{2026} + a_1 = a_1 + a_2 + a_3$, azaz $b + 2 + 2 = 2 + b + b$, amiből $b = 2$. A sokszög minden csúcsához a 2-t írtuk.	1 pont
A sokszög csúcsaihoz írt számok összege $2026 \cdot 2 = 4052$.	1 pont
Összesen:	**10 pont**