Fejér Lipót Matematikaverseny
2026/2027. Megyei forduló
Pécsi Janus Pannonius Gimnázium

11. évfolyam technikum / Pontozási útmutató

1. Ottó bácsi pénteken és szombaton is szilvát árult a piacon. Miután péntek délelőtt a szilva mennyiségének 40%-át eladta, délutánra 1 kg szilva árát 10%-kal csökkentette. A maradék szilvát az új egységáron adta el, ezzel összesen 30550 Ft bevételre tett szert. A szombati napon Ottó bácsi 30 kg-mal több szilvát adott el, mint pénteken, és 1 kg szilvát 10%-kal drágábban árult, mint péntek reggel. Ottó bácsi szombati bevétele összesen 57200 Ft volt. Összesen hány kg szilvát adott el Ottó bácsi a két nap alatt?

Ha péntek délelőtt a szilva egységárát x (Ft), kezdeti mennyiségét y (kg) jelöli, akkor az eladott szilva mennyiség $0{,}4y$ kg, ezért Ottó bácsi bevétele $0{,}4xy$ (Ft).	1 pont
Péntek délután a szilva egységára $0{,}9x$ Ft, az eladott mennyiség pedig $0{,}6y$ kg,	1 pont
ezért a délutáni bevétel $(0{,}9x)\cdot(0{,}6y)=0{,}54xy$ (Ft).	1 pont
Ottó bácsi pénteki bevételére $$0{,}4xy+0{,}54xy=30550,$$ amiből $$0{,}94xy=30550,$$ (1) $$xy=32500.$$	1 pont
A szilva kilóját szombaton Ottó bácsi $1{,}1x$ Ft-ért árulta, és ezen az áron $y+30$ kg-ot adott el,	1 pont
így a szombati bevételre $(1{,}1x)\cdot(y+30)=57200$.	1 pont
A zárójelek felbontása után $1{,}1xy+33x=57200$, amiből felhasználva az (1) összefüggést adódik, hogy $$35750+33x=57200.$$	1 pont
A kapott egyenlet megoldása $x=650$ Ft, amiből $y=50$ kg.	1 pont
Ottó bácsi a két nap alatt összesen 130 kg szilvát adott el.	1 pont
Ellenőrzés a feladat szövege alapján: Ottó bácsi pénteki bevétele összesen $650\cdot(0{,}4\cdot50)+(0{,}9\cdot650)\cdot(0{,}6\cdot50)=30550$ Ft, szombati bevétele pedig $(1{,}1\cdot650)\cdot80=57200$ Ft.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

2. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$$

A „belső” négyzetgyök miatt $x \geq -11$. A bal oldalon álló második „külső” négyzetgyök miatt $x \geq \sqrt{x+11}$, amiből adódik, hogy $x \geq 0$. Ekkor a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, így azt kapjuk, hogy $x^2 \geq x+11$. A kapott egyenlőtlenség megoldása $x \leq \frac{1-\sqrt{45}}{2}$, vagy $x \geq \frac{1+\sqrt{45}}{2}$ Az egyenlet értelmezési tartománya $\left[\frac{1+\sqrt{45}}{2}; \infty\right[$.	1 pont
Emeljük az egyenlet mindkét oldalát négyzetre, így kapjuk, hogy $$x+\sqrt{x+11}+x-\sqrt{x+11}+2\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+11}}\cdot\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=16.$$	2 pont
Az összevonások elvégzése, majd mindkét oldal 2-vel való osztása után adódik, hogy $$x+\sqrt{x+\sqrt{x+11}}\cdot\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=8.$$	1 pont
A négyzetgyök azonossága alapján $$x+\sqrt{\left(x+\sqrt{x+11}\right)\cdot\left(x-\sqrt{x+11}\right)}=8,$$ majd a szorzás elvégzése után $$x+\sqrt{x^2-x-11}=8.$$	2 pont
A kapott egyenletet átrendezve $$\sqrt{x^2-x-11}=8-x,$$ amiből az $\left[\frac{1+\sqrt{45}}{2}; 8\right]$ intervallumon négyzetre emelés után adódik, hogy $$x^2-x-11=64-16x+x^2.$$	2 pont*
Az egyenlet rendezésével elsőfokú egyenletet kapunk, amelynek megoldása $x=5$.	1 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy a kapott eredmény valóban megoldása az egyenletnek.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

*Megjegyzés: Amennyiben a versenyző a *-gal jelölt lépésnél a négyzetre emelés előtt megállapítja, hogy $x \leq 8$ és hibás négyzetre emelés miatt további pontokra már nem jogosult, akkor a *-gal jelölt részre 1 pontot kapjon.*

*Ha ugyanennél a lépésnél nem állapítja meg, hogy $x \leq 8$, de a megoldás további lépései jók és ellenőrzéssel megállapítja, hogy $x=5$ valóban megoldása az egyenletnek, akkor a *-gal jelölt pontot kapja meg.*

3. *Kornél számzáras lakatjának nyitókódja négyjegyű palindromszám, azaz olyan pozitív egész szám, amelynek számjegyeit fordított sorrendben írva eredményül az eredeti számot kapjuk. Palindromszám például a 3113 vagy a 2222. Egy alkalommal Kornél elfelejtette a nyitókódot, csak arra emlékezett, hogy a szám osztható 7-tel. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha Kornél véletlenszerűen választ egy 7-tel osztható négyjegyű palindromszámot, akkor az megegyezik a lakat nyitókódjával?*

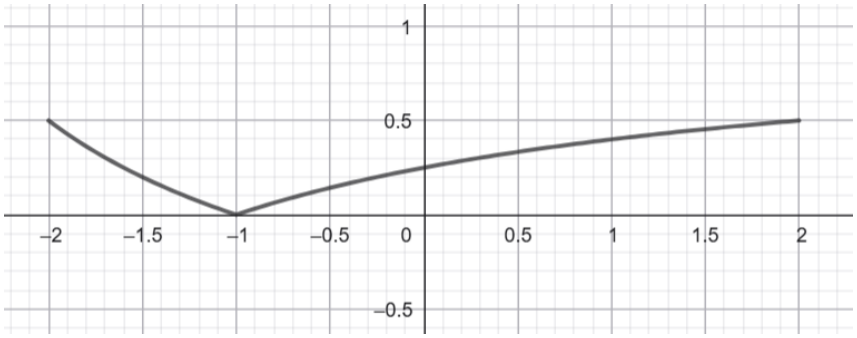
A négyjegyű palindromszámok $\overline{abba}$ alakban írhatók, ahol *a* és *b* számjegyeket jelölnek, továbbá $a \neq 0$.	1 pont
A felírt szám valódi értéke $1001a + 110b$.	2 pont
Mivel $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, ezért $1001a$ osztható 7-tel,	1 pont
továbbá a 7 és a 110 relatív prímek, ezért a négyjegyű palindromszám pontosan akkor osztható 7-tel, ha a tízesek és százasok helyén álló számjegye osztható 7-tel.	1 pont
Két ilyen számjegy van, a 0 és a 7, ezért $b = 0$ vagy $b = 7$.	2 pont
Az *a* számjegy értéke az $\{1; 2; \dots, 9\}$ halmazból tetszőlegesen választható, ezért a 7-tel osztható négyjegyű palindromszámok száma $9 \cdot 2 = 18$.	2 pont
Annak a valószínűsége, hogy Kornél elsőre eltalálja a lakat nyitókódját $\frac{1}{18}$.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

4. Adjuk meg a $[-2; 2]$ *intervallumon az*

$$f(x) = \left|\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 12}\right|$$

hozzárendelési szabállyal értelemezett függvény értékkészletét.

Az $x^2 + x - 12$ másodfokú kifejezés gyökei $x_1 = 3$ és $x_2 = -4$, ezért a gyöktényezős alak alapján $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$.	1 pont
A tört számlálójában álló kifejezés gyökei $x_1 = 3$ és $x_2 = -1$, ezért szintén a gyöktényezős alak alapján $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$.	1 pont
Az *f* függvény hozzárendelési szabálya ezek alapján $f(x) = \left\|\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+4)}\right\|$, amiből egyszerűsítés után adódik, hogy $f(x) = \left\|\frac{x+1}{x+4}\right\|$.	1 pont
Azonosan átalakítva a függvény hozzárendelési szabályát kapjuk, hogy $f(x) = \left\|\frac{x+4-3}{x+4}\right\| = \left\|1 - \frac{3}{x+4}\right\|$.	2 pont

Az *f* függvény grafikonját függvénytranszformációk segítségével ábrázolhatjuk.  	4 pont*
Mivel $f(-2) = f(2) = \frac{1}{2}$, ezért az *f* függvény értékkészlete a $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ intervallum.	1 pont*
Összesen:	**10 pont**

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat a versenyző az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja. A* $[-2; 2]$ *intervallumon* $2 \leq x + 4 \leq 6$, *amiből következik, hogy*

- $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{x+4} \leq \frac{1}{2}$, *1 pont*
- $-\frac{3}{2} \leq \frac{-3}{x+4} \leq -\frac{1}{2}$, *1 pont*
- $-\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{3}{x+4} \leq \frac{1}{2}$, *1 pont*
- $0 \leq \left|1 - \frac{3}{x+4}\right| \leq \frac{1}{2}$. *1 pont*

Az f függvény értékkészlete ezért a $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ *intervallum.* *1 pont*

5. Egy egyetem 800 hallgatója vett részt egy önkéntes pénzügyi tudatosságot elemző teszten. A teszt 50 kérdésből állt, és minden kérdésre választ kellett adni. A legtöbb rossz választ Arnold adta, összesen 19 kérdést rontott el, mindenki más nála kevesebbet hibázott. Minden kérdésre a helyes válaszért 1 pontot, a rossz válaszért 0 pontot lehetett kapni.

a) Bizonyítsuk be, hogy a kitöltők közt van 43 olyan ember, akik ugyanannyi kérdésre adtak helyes választ.

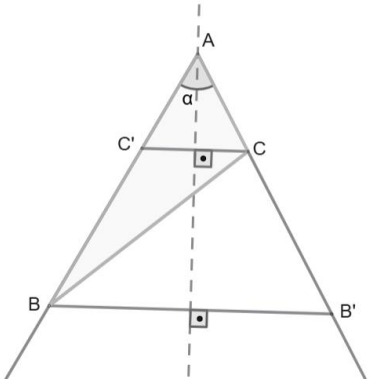
Ha Arnold tesztjét nem vesszük figyelembe, akkor a maradék tesztek pontszámának átlaga $\frac{1}{47}$*-del nagyobb, mint az összes teszt átlagpontszáma.*

b) Számítsuk ki a 800 teszt pontszámának átlagát.

a) Mivel mindenki kevesebb kérdést rontott el, mint Arnold, ezért a többi tesztben a rossz válaszok száma 0, 1, 2, …, 18 lehet. Ez összesen 19 lehetőség.	1 pont
Ez azt jelenti, hogy Arnold tesztjét nem tekintve, pontszámuk alapján összesen 19-féle tesztet írtak a hallgatók. Ha az azonos pontszámú teszteket egy-egy skatulyába helyezzük, és minden skatulyában legfeljebb 42 teszt van, akkor ez maximum $19 \cdot 42 = 798$ teszt. Ehhez jön még Arnold tesztje, így a tesztek száma 799 lenne.	2 pont
Mivel $800 > 19 \cdot 42 + 1$, ezért biztosan van legalább 43 olyan teszt, amely azonos pontszámot kapott, és ezek kitöltői ugyanannyi kérdésre adtak helyes választ.	1 pont

b) Jelöljük x-szel a 800 hallgató pontszámának átlagát. Ekkor az összes teszt pontszámának összege $800x$, és mivel Arnold 31 pontot ért el, ezért az ő tesztje nélkül a többi hallgató pontszámának összege $800x - 31$.	1 pont
Arnold tesztje nélkül a pontszámok átlaga $$\frac{800x - 31}{799}.$$	1 pont
A feltételek szerint $$\frac{800x - 31}{799} = \frac{1}{47} + x.$$	1 pont
A kapott egyenlet mindkét oldalát 799-cel szorozva kapjuk, hogy $$800x - 31 = 17 + 799x,$$ amelynek megoldása $x = 48$.	1 pont
A tesztek pontszámának átlaga 48.	1 pont
Ellenőrzés a feladat szövege alapján: Arnold tesztje nélkül a tesztek átlagpontszáma $$\frac{800 \cdot 48 - 31}{799} = \frac{1}{47} + 48.$$	1 pont
Összesen:	**10 pont**

6. *Az ABC háromszögben $AC < AB$. A háromszög B, illetve C csúcsát tükrözzük az A csúcshoz tartozó belső szögfelezőre, az így kapott tükörképeket jelölje rendre B' és C'. A $BB'CC'$ négyszög és az ABC háromszög területére teljesül, hogy* $$\frac{T_{BB'CC'}}{T_{ABC}} = \frac{8}{3}.$$ *Határozzuk meg az $\frac{AB}{AC}$ tört értékét.*

Ábrát készítünk a feladat szövege alapján. Mivel az A csúcshoz tartozó szögfelező a $BAC\angle$ szögtartomány szimmetriatengelye, ezért B' az AC egyenes, C' az AB szakasz egy-egy pontja. A tükrözés távolságtartó tulajdonsága alapján $AB = AB' = c$ és $AC = AC' = b$. 	2 pont
Ha az ABC háromszög A csúcsánál lévő szöget α jelöli, akkor a $BB'CC'$ négyszög területe $$T_{BB'CC'} = T_{ABB'} - T_{AC'C} = \frac{c^2 \cdot \sin\alpha}{2} - \frac{b^2 \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{(c^2 - b^2) \cdot \sin\alpha}{2}.$$	2 pont

Mivel az ABC háromszög területe $T_{ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}$, ezért a feladat feltétele alapján $$\frac{c^2 - b^2}{b \cdot c} = \frac{8}{3}.$$	2 pont
A kapott egyenletet $\frac{c}{b} - \frac{b}{c} = \frac{8}{3}$ alakban írhatjuk, amiből $y = \frac{c}{b}$ helyettesítés után $$y - \frac{1}{y} = \frac{8}{3}$$ adódik.	1 pont
A közös nevezővel való szorzás és rendezés után a $3y^2 - 8y - 3 = 0$ alakot kapjuk. Ennek megoldásai $y = 3$ és $y = -\frac{1}{3}$. Mivel $y > 0$, ezért $y = 3$.	2 pont
Mivel $\frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = y$, ezért az $\frac{AB}{AC}$ tört értéke 3.	1 pont
Összesen:	**10 pont**