Fejér Lipót Matematikaverseny
2026/2027. Megyei forduló
Pécsi Janus Pannonius Gimnázium

12. évfolyam gimnázium / Pontozási útmutató

1. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$(x^2-5x+6)^2+(x^2+5x+6)^2=20(x^2+6)x$$

Vezessük be az $a=x^2+6$, $b=5x$ jelöléseket. Ekkor egyenletünk $(a-b)^2+(a+b)^2=4ab$ alakban írható.	2 pont
A bal oldalon elvégezve a négyzetre emeléseket kapjuk, hogy $a^2-2ab+b^2+a^2+2ab+b^2=4ab,$ majd rendezés, összevonás és mindkét oldal 2-vel való osztása után $a^2-2ab+b^2=0.$	2 pont
A bal oldalon teljes négyzet áll, ezért $(a-b)^2=0,$	1 pont
tehát $a=b$.	1 pont
Visszahelyettesítés után $x^2+6=5x$, amiből az $x^2-5x+6=0$ egyenlethez jutunk.	1 pont
A kapott másodfokú egyenlet megoldásai $x=2$ és $x=3$.	2 pont
Mindkét szám kielégíti az eredeti egyenletet, amiről behelyettesítés után meggyőződhetünk.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

2. Az f és g függvényeket a valós számok halmazán az alábbi hozzárendelési szabályokkal értelmezzük:

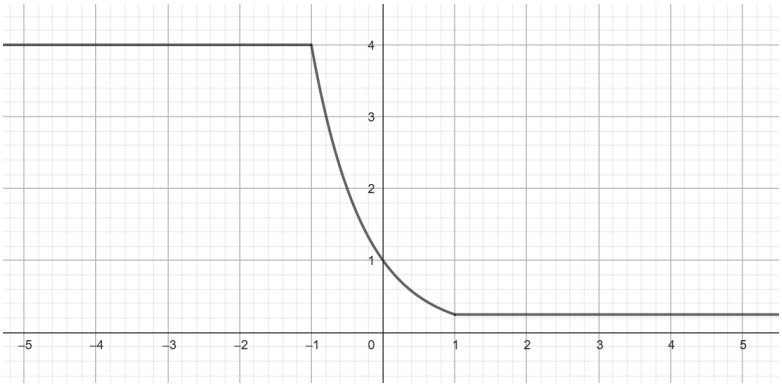
$$f(x)=2^{|x-1|-|x+1|}, \qquad g(x)=p\cdot x+2,$$

ahol a p valós paramétert jelöl. Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az

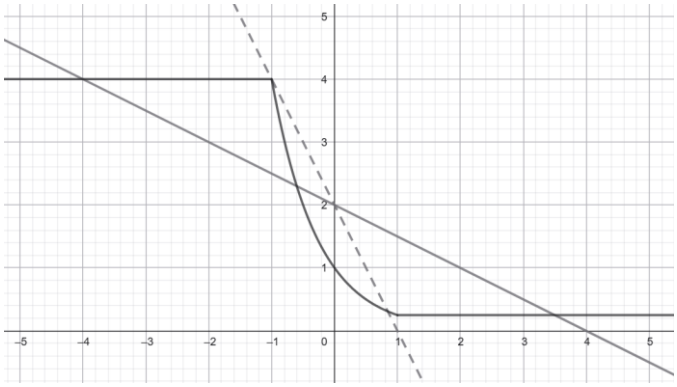
$$f(x)=g(x)$$

egyenletnek 3 megoldása legyen.

Felbontjuk a kitevőben szereplő abszolút értékeket. Ha $x>1$, akkor $f(x)=2^{x-1-(x+1)}=2^{-2}=\frac{1}{4}$.	1 pont
Ha $-1\le x\le 1$, akkor $f(x)=2^{-(x-1)-(x+1)}=2^{-2x}=\left(\frac{1}{4}\right)^x$.	1 pont
Ha $x<-1$, akkor $f(x)=2^{-(x-1)+(x+1)}=2^2=4$.	1 pont

Ábrázoljuk az *f* függvény grafikonját. 	3 pont
A g függvény grafikonja olyan egyenes, amely átmegy a $(0;2)$ koordinátájú ponton.	1 pont*
Ha $p > 0$, akkor a g függvény szigorúan monoton nő, ezért az f függvény grafikonját egyetlen pontban metszi.	1 pont*
Ha $p < 0$, akkor az $f(x) = g(x)$ egyenletnek pontosan egy olyan megoldása, amelyre $x > 0$. További két megoldás létezésének feltétele, hogy a két függvény grafikonjának legyen egy olyan metszéspontja, amelynek abszcisszája a $]-1;0[$ intervallumba esik, illetve legyen egy olyan metszéspontja, amelynek első koordinátája -1-nél kisebb.	1 pont*
Az egyenletnek akkor van 3 megoldása, ha $-2 < p < 0$.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

*Megjegyzés: A versenyző a *-gal jelölt pontokat kapja meg, ha szöveges indoklás helyett grafikusan gondolkodik. Az alábbi ábrán szaggatott vonal jelöli a g függvény grafikonjának azt a „határhelyzetét", amelynél $p < 0$, és az $f(x) = g(x)$ egyenletnek 2 megoldása van. Ebben az esetben $p = -2$. Látható, hogy ha $-2 < p < 0$, akkor az egyenletnek 3 megoldása van.*



3. Az ABC háromszög két csúcsa: $A(1;2), B(5;6)$, a háromszög C csúcsa illeszkedik az $y=-3x+1$ egyenletű egyenesre. Határozzuk meg a C csúcs koordinátáit, ha az ABC háromszög területe 16 területegység.

Első megoldás

Az $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátái: $\overrightarrow{AB}\ (4;4)$. Az *AB* szakasz hossza $4\cdot\sqrt{2}$.	1 pont
Ha az *ABC* háromszög *AB* oldalhoz tartozó magasságát *m* jelöli, akkor $$\frac{4\cdot\sqrt{2}\cdot m}{2}=16,$$ amiből $m=4\cdot\sqrt{2}$ adódik.	1 pont
Ebből következik, hogy a *C* csúcs illeszkedik az *AB* egyenessel párhuzamos, attól $4\cdot\sqrt{2}$ távolságra haladó egyenesre.	1 pont
Két ilyen egyenes van. Ezeknek egy-egy pontját megkaphatjuk, ha a *B* pontot az *A* pont körül 90°-kal, vagy $-90°$-kal elforgatjuk.	1 pont
Első eset. Ha az $\overrightarrow{AB}$ vektort 90°-kal forgatjuk, akkor az elforgatott vektor koordinátái: $\mathbf{v}(-4;4)$. A *B* pont elforgatott képe $B_1(-3;6)$. A B_1 pontot tartalmazó, *AB*-vel párhuzamos egyenes irányvektora az $\overrightarrow{AB}$ vektor, ezért az egyenes egyenlete $4x-4y=-36$.	2 pont
Az *ABC* háromszög *C* csúcsa illeszkedik az $y=-3x+1$, illetve az $x-y=-9$ egyenletű egyenesekre. A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása $x=-2, y=7$. A feladat egyik megoldása: $C_1(-2;7)$.	1 pont
Második eset. Ha az $\overrightarrow{AB}$ vektort $-90°$-kal forgatjuk, akkor az elforgatott vektor koordinátái: $\mathbf{v}(4;-4)$. A *B* pont elforgatott képe $B_2(5;-2)$. A B_2 pontot tartalmazó, *AB*-vel párhuzamos egyenes egyenlete $4x-4y=28$.	2 pont
Az *ABC* háromszög *C* csúcsa illeszkedik az $y=-3x+1$, illetve az $x-y=7$ egyenletű egyenesekre. A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása $x=2, y=-5$. A feladat másik megoldása: $C_2(2;-5)$.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

Megjegyzés: Ha a versenyző ábrát készít és a C csúcs koordinátáit a számítások részletezése nélkül az ábra alapján adja meg, akkor a javítási útmutató első 3 pontján felül 1 megoldás megtalálása esetén legfeljebb 1 pontot, mindkét megoldás megtalálása esetén legfeljebb 2 pontot kapjon.

Második megoldás

Az $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátái: $\overrightarrow{AB}\ (4;4)$. Az *AB* szakasz hossza $4\cdot\sqrt{2}$.	1 pont
Ha az *ABC* háromszög *AB* oldalhoz tartozó magasságát *m* jelöli, akkor $$\frac{4\cdot\sqrt{2}\cdot m}{2}=16,$$ amiből $m=4\cdot\sqrt{2}$ adódik.	1 pont
Ebből következik, hogy a *C* csúcson átmenő, az *AB* egyenessel párhuzamos *e* egyenes az *A* (és persze a *B*) csúcstól $4\cdot\sqrt{2}$ távolságra halad.	1 pont
Az *e* egyenes egyenletét $4x-4y=c$ alakban kereshetjük, ahol *c* valós számot jelöl.	1 pont

A pont és egyenes távolságképletét alkalmazva az *A* pontra és az *e* egyenesre azt kapjuk, hogy $\left\|\frac{4\cdot 1-4\cdot 2-c}{\sqrt{4^2+4^2}}\right\|=4\cdot\sqrt{2}.$	2 pont
A műveletek elvégzése és az egyenlet rendezése után $\|-4-c\|=32$, amiből $c=-36$, illetve $c=28$.	2 pont
A feladatnak két megoldása van. Ha $c=-36$, akkor az *ABC* háromszög *C* csúcsa illeszkedik a $4x-4y=-36$ és az $y=-3x+1$ egyenletű egyenesekre. A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása $x=-2$, $y=7$. A feladat egyik megoldása: $C_1(-2;7)$.	1 pont
Ha $c=28$, akkor az *ABC* háromszög *C* csúcsa illeszkedik a $4x-4y=28$ és az $y=-3x+1$ egyenletű egyenesekre. A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása $x=2$, $y=-5$. A feladat másik megoldása: $C_2(2;-5)$.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

4. Egy szabályos 12-szög minden csúcsához egy-egy pozitív egész számot írunk, majd a sokszög oldalaihoz hozzárendeljük az adott oldal két végpontjához írt számok szorzatát. Lehetséges-e, hogy az oldalakhoz írt számok halmaza megegyezik az

$$A=\{3!;\ 4!;\ 5!;\ \ldots;14!\}$$

halmazzal?

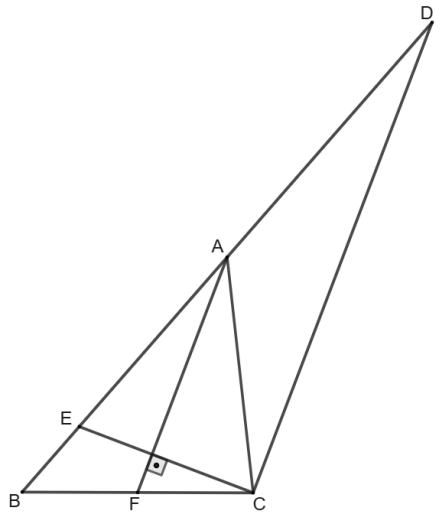
Jelöljük a szabályos 12-szög csúcsaihoz írt számokat (pozitív körüljárási irányt tartva) $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$-vel. Ekkor az oldalakhoz írt számok rendre $a_1\cdot a_2, a_2\cdot a_3, a_3\cdot a_4, \ldots, a_{11}\cdot a_{12}, a_{12}\cdot a_1$.	1 pont
Ha az oldalakhoz írt számok szorzatát *X* jelöli, akkor $X=(a_1\cdot a_2)\cdot(a_2\cdot a_3)\cdot(a_3\cdot a_4)\cdot\ldots\cdot(a_{11}\cdot a_{12})\cdot(a_{12}\cdot a_1)$,	1 pont
amiből a tényezők többszöri felcserélése után $X=a_1^2\cdot a_2^2\cdot a_3^2\cdot\ldots\cdot a_{11}^2\cdot a_{12}^2$ adódik.	1 pont
Az *X* szám tehát négyzetszám.	2 pont
Megmutatjuk, hogy az *A* halmaz elemeinek szorzata nem négyzetszám.	2 pont
Tekintsük az $Y=3!\cdot 4!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot 14!$ szorzat prímtényezős felbontását. Az *Y* tényezői közül a $7!, 8!, \ldots, 13!$ mindegyikének a prímtényezős felbontásában a 7 kitevője 1, míg a 14!-ban a 7 kitevője 2. Ezért *Y* prímtényezős felbontásában a 7 kitevője 9, ami páratlan szám, ezért *Y* valóban nem négyzetszám.	2 pont
Mivel az *A* halmaz elemeinek szorzata nem négyzetszám, ezért a 12-szög oldalaihoz írt számok halmaza nem egyezhet meg az *A* halmazzal.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

Megjegyzés: Az A halmaz elemeinek szorzatát prímtényezőkre bontva azt kapjuk, hogy

$$Y=3!\cdot 4!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot 14!=2^{76}\cdot 3^{36}\cdot 5^{15}\cdot 7^9\cdot 11^4\cdot 13^2,$$

ezért az 5 kitevőjének kiszámítása után is igazolható, hogy Y nem négyzetszám.

5. *Az ABC háromszögben $AB > BC$, a BC oldal felezőpontja F, a B csúcs A pontra vonatkozó tükörképe D. A háromszög C csúcsán átmenő, az AF súlyvonalra merőleges egyenes az AB oldalt az E pontban metszi. Számítsuk ki a CDE háromszög beírt körének sugarát, ha $AF = 6, CE = 5$.*

Ábrát készítünk a feladat szövege alapján.  	1 pont
A tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt $AB = AD$, ezért az AF szakasz középvonal a BCD háromszögben.	1 pont
A háromszög középvonala párhuzamos a nem felezett oldalakkal, ezért $AF \parallel DC$, amiből következik, hogy EC merőleges DC-re, azaz a CDE háromszög derékszögű.	2 pont
A háromszög középvonala feleakkora, mint a vele párhuzamos oldal, ebből adódik, hogy $AF = \frac{DC}{2}$, és ezért $DC = 12$.	1 pont
A CDE derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt $ED^2 = CE^2 + DC^2$, azaz $ED^2 = 5^2 + 12^2$, amiből adódik, hogy $ED = 13$.	2 pont
A CDE háromszög területe $T = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$.	1 pont
A CDE háromszög félkerülete $s = 15$, amiből a háromszög beírt körének r sugara $$r = \frac{T}{s} = 2.$$	2 pont
Összesen:	**10 pont**

Megjegyzés: A CDE derékszögű háromszög beírt körének sugara az $r = \frac{a+b-c}{2}$ képlettel is számolható. Ez alapján $r = \frac{5+12-13}{2} = 2$.

6. Az A halmaz a derékszögű koordinátarendszer olyan $P(x;y)$ pontjait tartalmazza, amelyeknek koordinátái egész számok, továbbá $0 \leq x \leq 4$ és $0 \leq y \leq 4$ teljesül. Az A halmazból véletlenszerűen kiválasztunk 2 pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pontokra illeszkedő egyenes meredeksége pozitív?

Első megoldás

Az *A* halmazban összesen 25 pont van.	1 pont
Ezek közül 2 pontot összesen $\binom{25}{2} = 300$-féleképp tudunk kiválasztani.	1 pont
Ha a két kiválasztott pont által meghatározott egyenes párhuzamos az *x*-tengellyel, akkor meredeksége 0. Az $y = 0, y = 1, \ldots, y = 4$ egyenletű egyenesek mindegyikét $\binom{5}{2} = 10$-féleképp kaphatjuk, ezért összesen 50 olyan eset van, amelyben a kapott egyenes meredeksége 0.	2 pont
Ha a két kiválasztott pont által meghatározott egyenes párhuzamos az *y*-tengellyel, akkor nincs meredeksége. A fentihez hasonló gondolatmenettel azt kapjuk, hogy az ilyen esetek száma szintén 50.	1 pont
A maradék 200 egyenesnek pontosan a fele pozitív meredekségű. Ennek belátásához elegendő megmutatni, hogy az egyenesek párba állíthatók úgy, hogy minden pozitív meredekségű egyeneshez pontosan egy negatív meredekségű egyenes tartozik.	1 pont
Ha a két kiválasztott pont $A(a_1;\ a_2)$ és $B(b_1;\ b_2)$ úgy, hogy $0 \leq a_1 < b_1 \leq 4$ és $0 \leq a_2 < b_2 \leq 4$, akkor az *AB* egyenes pozitív meredekségű, hiszen $\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1} > 0$. Legyen $A'(a_1;\ b_2)$ és $B'(b_1;\ a_2)$. Ekkor mindkét pont az *A* halmaz eleme, továbbá az $A'B'$ egyenes meredeksége $\frac{a_2-b_2}{b_1-a_1} < 0$. Gondolatmenetünk mutatja, hogy minden negatív meredekségű egyeneshez is pontosan egy pozitív meredekségű egyenes tartozik. Ezzel igazoltuk, hogy a pozitív és a negatív meredekségű egyenesek száma megegyezik.	2 pont
A pozitív meredekségű egyenesek száma 100.	1 pont
Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pontok által meghatározott egyenes meredeksége pozitív $\frac{100}{300} = \frac{1}{3}$.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

Második megoldás

Az *A* halmazban összesen 25 pont van.	1 pont
Ezek közül 2 pontot összesen $\binom{25}{2} = 300$-féleképp tudunk kiválasztani.	1 pont
Mindkét kiválasztott ponton át húzzunk egy-egy egyenest az *x*-tengellyel, illetve az *y*-tengellyel párhuzamosan. Ha az egyenes meredeksége pozitív, akkor az így kapott 4 egyenes egy téglalapot határoz meg. Fordítva: ha tekintünk egy olyan téglalapot, amelynek csúcsai az *A* halmaz elemei közül valók, akkor a téglalap egyik átlóegyenese egy pozitív meredekségű egyenest határoz meg.	2 pont
Ez azt jelenti, hogy a pozitív meredekségű egyenesek száma megegyezik az *A* halmaz pontjai által meghatározott, tengelyekkel párhuzamos oldalú téglalapok számával.	2 pont

Egy ilyen téglalapot két vízszintes és két függőleges oldalegyenese meghatározza. A vízszintes oldalegyeneseket $\binom{5}{2} = 10$-féleképp, a függőleges oldalegyeneseket szintén $\binom{5}{2} = 10$-féleképp választhatjuk meg.	2 pont
A téglalapok, és így a pozitív meredekségű egyenesek száma tehát 100.	1 pont
Annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pontok által meghatározott egyenes meredeksége pozitív $\frac{100}{300} = \frac{1}{3}$.	1 pont
Összesen:	**10 pont**