Fejér Lipót Matematikaverseny
2026/2027. Megyei forduló
Pécsi Janus Pannonius Gimnázium

11. évfolyam gimnázium / Pontozási útmutató

1. Hány olyan 2026-nál nem nagyobb pozitív egész n szám van, amelyre az $\frac{n^2+3n-4}{6}$ *tört értéke egész szám?*

A tört számlálójában álló kifejezést szorzattá alakítjuk: $\frac{n^2+3n-4}{6}=\frac{(n-1)\cdot(n+4)}{6}$.	2 pont
A számláló tényezőinek különbsége $(n+4)-(n-1)=5$, ami páratlan, ezért a szorzat tényezői különböző paritásúak. Ebből adódik, hogy a tört számlálója minden *n* esetén osztható 2-vel.	2 pont
A tört értéke pontosan akkor egész szám, ha $(n-1)\cdot(n+4)$ osztható 3-mal. Mivel a 3 prímszám, ezért ez akkor következik be, ha $3\mid n-1$, vagy $3\mid n+4$.	1 pont
Ha $3\mid n-1$, akkor az *n* szám 3-mal osztva 1 maradékot ad. Mivel $2026=3\cdot 675+1$, ezért a 2026-nál nem nagyobb pozitív egész számok közt 676 darab olyan van, amely 3-mal osztva 1 maradékot ad.	2 pont
Ha $3\mid n+4$, akkor az *n* szám 3-as maradéka 2. Az ilyen *n*-ek száma 675.	2 pont
Összesen $676+675=1351$ darab olyan 2026-nál nem nagyobb pozitív egész szám van, amelyre a tört értéke egész szám.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

Megjegyzések:

1. *A versenyző az alábbi gondolatmenettel is összeszámolhatja a feltételeknek eleget tevő számok számát. A 3-mal osztható 2026-nál nem nagyobb pozitív egész számok száma 675. Ebből adódóan 3-mal osztva 1, vagy 2 maradékot ad* $2026-675=1351$ *szám.*
2. *A feladat a számláló szorzattá alakítása nélkül is megoldható.*
   Ha n páros, akkor a számláló minden tagja páros, így maga a számláló is páros. Ha n páratlan, akkor n^2 *és* $3n$ *is páratlanok, ezért a számláló ebben az esetben is páros.*
   Mivel $n^2+3n-4=n^2-1+3n-3$*, és* $3n-3$ *osztható 3-mal, ezért a számláló 3-mal való oszthatóságának feltétele, hogy* n^2-1 *osztható legyen 3-mal. Négyzetszámok 3-as maradéka 1 vagy 0 lehet, ebből adódóan* n^2-1 *minden olyan esetben osztható 3-mal, ha n nem osztható 3-mal.*

2. A 34545 olyan ötjegyű szám, amelyben az egyik számjegy egyszer, további két számjegy mindegyike kétszer szerepel. Hány ilyen tulajdonságú ötjegyű pozitív egész szám van, ha számjegyei az $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ halmaz elemei közül kerülnek ki?

Összeszámoljuk azokat az ötjegyű számokat, amelyek megfelelnek a feltételeknek és nem tartalmazzák a 0 számjegyet. Azt a számjegyet, amelyik egyszer szerepel 7-féleképp választhatjuk meg. A másik két szereplő számjegyet $\binom{6}{2} = 15$-féleképp választhatjuk, így a számjegyeket összesen $7 \cdot 15 = 105$-féleképp választhatjuk ki.	1 pont
A kiválasztott öt számjegyet $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$-féleképp rendezhetjük sorba.	1 pont
A feltételeknek megfelelő, 0-t nem tartalmazó számok száma $105 \cdot 30 = 3150$.	1 pont
Összeszámoljuk a 0-t is tartalmazó számokat. Ha a 0-ból 1 darab van, akkor a szám másik két számjegyét $\binom{7}{2} = 21$-féleképp választhatjuk.	1 pont
A szereplő számjegyek közül a 0 nem állhat az első helyen, ezért a kiválasztott számjegyeket $\frac{4 \cdot 4!}{2! \cdot 2!} = 24$-féleképp rendezhetjük sorba.	1 pont
A megfelelő számok száma ebben az esetben $21 \cdot 24 = 504$.	1 pont
Ha a 0-ból 2 darab van, akkor azt a számjegyet, amelyből 1 darab van 7, a másik számjegyet 6-féleképp választhatjuk. A 0-tól különböző számjegyek megválasztására 42 lehetőség adódik.	1 pont
A számjegyeket $\frac{3 \cdot 4!}{2! \cdot 2!} = 18$-féleképp rendezhetjük sorba.	1 pont
A megfelelő ötjegyű számok száma ebben az esetben $42 \cdot 18 = 756$.	1 pont
A feltételeknek megfelelő ötjegyű számok száma $3150 + 504 + 756 = 4410$.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

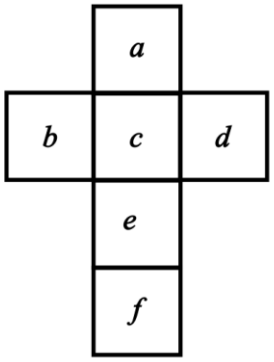
3. Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenletet.

$$(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) = (x + 4)^2 + 9$$

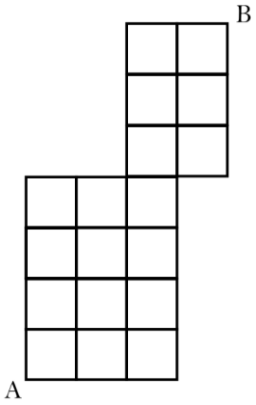
Az egyenlet bal oldalán összeszorozzuk az első és utolsó, valamint a két középső tényezőt, a jobb oldalán elvégezzük a négyzetre emelést. Ekkor $(x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) = x^2 + 8x + 25.$	2 pont
Bevezetve az $y = x^2 + 8x$ változót, egyenletünk az $(y + 7)(y + 15) = y + 25$ alakban írható.	2 pont
A műveletek elvégzése és 0-ra redukálás után az $y^2 + 21y + 80 = 0$ egyenletet kapjuk.	1 pont
A kapott másodfokú egyenlet megoldásai $y = -16$ és $y = -5$.	1 pont
Ha $y = -16$, akkor $x^2 + 8x + 16 = 0$. Az egyenlet megoldása $x = -4$.	1 pont
Ha $y = -5$, akkor $x^2 + 8x + 5 = 0$. Az egyenlet diszkriminánsa 44, ami nem négyzetszám, ezért az egyenletnek nincs racionális gyöke.	2 pont

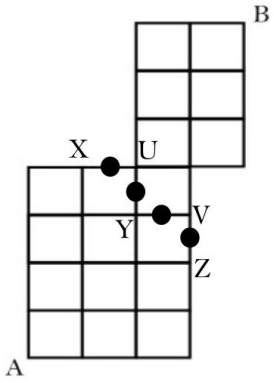
Az egyenlet egyetlen racionális megoldása $x = -4$. A kapott gyök valóban kielégíti az eredeti egyenletet, amiről behelyettesítéssel meggyőződhetünk.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

4. Egy kocka minden lapjára egy-egy pozitív egész számot írunk, majd a kocka csúcsaihoz hozzárendeljük az adott csúcsot tartalmazó lapokra írt három szám szorzatát. A csúcsokhoz rendelt számok összege 1001. Számítsuk ki a kocka lapjaira írt számok összegét.

Az alábbi ábra a kocka síkbeli hálóját, valamint a lapokra írt a, b, c, d, e, f számokat mutatja.  Ekkor a kocka csúcsaihoz írt számok: $abc, bce, cde, acd, bef, def, adf, abf$.	1 pont
A feladat feltétele szerint $abc + bce + cde + acd + bef + def + adf + abf = 1001.$	1 pont
A bal oldalon álló tagokat kettesével csoportosítva kiemeléseket végezhetünk, így kapjuk, hogy $bc(a+e) + cd(a+e) + ef(b+d) + af(b+d) = 1001.$	2 pont
Folytatva a kiemeléseket $c(a+e)(b+d) + f(b+d)(a+e) = 1001,$	2 pont
amiből végül $(a+e)(b+d)(c+f) = 1001.$	1 pont
Mivel $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, és a bal oldal minden tényezője legalább 2, ezért a tényezők valamilyen sorrendben megegyeznek a 7, 11, 13 prímszámok valamelyikével.	2 pont
Ebből következik, hogy $(a+e) + (b+d) + (c+f) = 7 + 11 + 13 = 31$. A lapokra írt számok összege 31.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

5. Az alábbi térkép egy lakóparkot ábrázol. Az egymást keresztező utcák merőlegesek egymásra, továbbá két szomszédos útkereszteződés közt a távolság állandó. Anna az A-val, Botond a B-vel jelölt helyről egyszerre indul egymás felé, útjuk során mindketten ugyanakkora, állandó sebességgel haladnak és az AB távolságot a legrövidebb utak valamelyikén teszik meg. Az útkereszteződésekben egymástól függetlenül mindketten egyenlő valószínűséggel választanak egyet a lehetséges útirányok közül. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Anna és Botond találkoznak egymással?



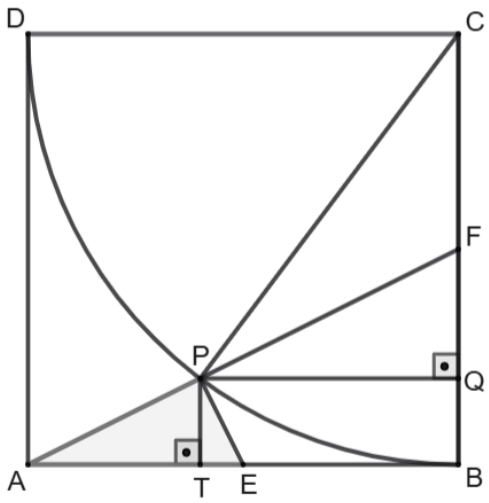
Nevezzük útszakasznak a két szomszédos kereszteződés közti részt. Az A és B pontok között 11 útszakaszt kell megtennie Annának és Botondnak. Mivel sebességük megegyezik, ezért csak 5 teljes útszakasz megtétele után, a következő útszakasz felezőpontjában találkozhatnak. Az alábbi ábrán ponttal megjelöltük azokat a helyeket, ahol Anna és Botond találkozhat egymással. Anna 5 útszakasz megtétele után az X, Y, Z pontok, Botond az U, V pontok valamelyikébe juthat.  	1 pont
Ahhoz, hogy Anna 5 útszakasz után az X pontba érkezzen, 4 útszakaszt felfelé, egyet jobbra kell megtennie. Az X pontba vezető utak száma ezért 5. Annának az Y pontig 2 útszakaszt jobbra, 3-at felfelé kell megtennie, ezért a lehetséges utak száma $\frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$. A Z pontig 3 útszakaszt jobbra és 2-t felfelé kell megtenni, ezért a lehetséges utak száma szintén 10.	2 pont
Anna 5 útszakasz megtétele után összesen $5 + 10 + 10 = 25$ különböző útvonalon közlekedhetett. Ezért annak a valószínűsége, hogy Anna az X pontba jut $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$, annak a valószínűsége, hogy az Y pontba jut $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$, míg a Z pontba jutás valószínűsége szintén $\frac{2}{5}$.	1 pont

A fentihez hasonló módon számolhatjuk ki annak a valószínűségét, hogy 5 útszakasz megtétele után Botond az U, illetve V pontba jut. Az U pontig vezető útvonalak száma $\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$. A V pontig 3 útszakaszt lefelé és egyet balra kell megtennie, továbbá az utolsó útszakasz biztosan lefelé halad. Ennek megfelelően a V pontig $\frac{4!}{3!}=4$ fajta útvonal vezet. Annak a valószínűsége, hogy Botond 5 útszakasz után az U pontba jut $\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$. A V pontba jutás valószínűsége $\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$.	2 pont
Az XU szakaszon találkozás valószínűsége $\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{14}$, hiszen Anna $\frac{1}{5}$, Botond $\frac{5}{7}$ valószínűséggel jut el X-ig, illetve U-ig, ezután Anna csak jobbra haladhat, míg Botond $\frac{1}{2}$ valószínűséggel halad X irányába a következő útszakaszon.	1 pont
Az YU útszakaszon találkozás valószínűsége $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{14}$. Az YV útszakaszon találkozás valószínűsége $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{35}$. A ZV útszakaszon találkozás valószínűsége $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{35}$.	2 pont
Anna és Botond találkozásának valószínűsége $\frac{1}{14}+\frac{1}{14}+\frac{1}{35}+\frac{2}{35}=\frac{8}{35}$.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

6. Az ABCD négyzet AB oldalának felezőpontja E, a BC oldalának felezőpontja F. A C középpontú CB sugarú kör és az AF szakasz metszéspontja P. Számítsuk ki az AEP háromszög és az ABCD négyzet területének arányát.

Első megoldás:

Ábrát készítünk a feladat szövege alapján, melyen a *P* pont *AB* oldalra eső merőleges vetületét *T*, míg a *BC* oldalra eső merőleges vetületét *Q* jelöli. Mivel az *ATP* és az *ABF* háromszögek derékszögűek, továbbá *A* csúcsnál lévő szögük megegyezik, ezért a két háromszög hasonló egymáshoz. Ha az *ABCD* négyzet oldalát *a* jelöli, akkor $\frac{AB}{BF}=\frac{a}{a/2}=2,$ ezért $\frac{AT}{TP}=2$.	2 pont

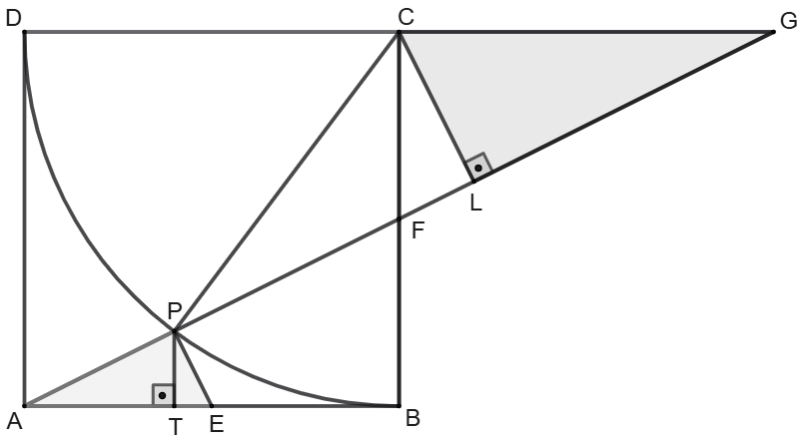
	
Jelölje az *TP* szakasz hosszát x, az *ABCD* négyzet oldalának hosszát *a*. Ekkor $AT = 2 \cdot TP = 2x$, továbbá $PQ = a - AT = a - 2x$, és $CQ = a - TP = a - x$.	2 pont
A *CPQ* derékszögű háromszög átfogója $CP = CB = a$, ezért Pitagorasz-tétele alapján $CP^2 = CQ^2 + PQ^2$, amiből $a^2 = (a-x)^2 + (a-2x)^2$, végül a műveletek elvégzése és rendezés után $5x^2 - 6ax + a^2 = 0$.	2 pont
A kapott egyenlet x-ben másodfokú, gyökei $x = a$, és $x = \frac{a}{5}$. Mivel *P* az *ABCD* négyzet belső pontja, ezért $x < a$, amiből következik, hogy $TP = x = \frac{a}{5}$.	1 pont
Ekkor az *AEP* háromszög területe $$T_{AEP} = \frac{AE \cdot TP}{2} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{5}}{2} = \frac{a^2}{20}.$$	2 pont
Az *AEP* háromszög és az *ABCD* négyzet területének aránya $\frac{1}{20}$.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

Második megoldás:

Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy az *ABCD* négyzet *A* csúcsa megegyezzen az origóval, a négyzet *AB* oldala az *x*-tengely, *AD* oldala az *y*-tengely pozitív felére illeszkedjen. Ha a négyzet oldalát *a* jelöli, akkor csúcsainak koordinátái: $A(0;0), B(a;0), C(a;a), D(0;a)$.	1 pont
Az *F* pont koordinátái $F\left(a;\frac{a}{2}\right)$. Az *AF* egyenes meredeksége $\frac{1}{2}$, egyenlete $y = \frac{1}{2}x$.	2 pont
A *C* középpontú $CB = a$ sugarú *k* kör egyenlete $$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2.$$	1 pont
Az *AF* egyenes és a *k* kör metszéspontjainak koordinátáit az egyenletükből álló egyenletrendszer megoldásai adják. A kör egyenletébe behelyettesítve az $y = \frac{1}{2}x$ összefüggést $$(x-a)^2 + \left(\frac{1}{2}x - a\right)^2 = a^2.$$	1 pont
A kijelölt műveletek elvégzése és rendezés után $\frac{5}{4}x^2 - 3ax + a^2 = 0$.	1 pont

A kapott egyenlet x-ben másodfokú, megoldásai $x = \frac{2}{5}a$ és $x = 2a$. Mivel $x < a$, ezért $x = \frac{2}{5}a$, és $y = \frac{1}{2}x = \frac{a}{5}$. A P pont koordinátái $P\left(\frac{2a}{5}; \frac{a}{5}\right)$.	1 pont
Az AEP háromszög területe $$T_{AEP} = \frac{AE \cdot TP}{2} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{5}}{2} = \frac{a^2}{20}.$$	2 pont
Az AEP háromszög és az $ABCD$ négyzet területének aránya $\frac{1}{20}$.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

Harmadik megoldás

Ábrát készítünk a feladat szövege alapján. Az AF és a DC egyenesek metszéspontját G-vel, a C csúcsból az AG-re emelt merőleges talppontját L-lel, a P pontból az AB-re emelt merőleges talppontját T-vel jelöljük. Ha az $ABCD$ négyzet oldalának hosszát a jelöli, akkor az ABF és GCF háromszögek egybevágósága miatt $CG = DC = a$.  	1 pont
A GAD háromszögben a D csúcsnál derékszög van, ezért Pitagorasz-tétele alapján $GA = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5} \cdot a$. A GCL háromszög hasonló a GAD háromszöghöz, hiszen mindkettő derékszögű, valamint a G csúcsnál lévő szögük közös. Ebből adódik, hogy $$\frac{GL}{GC} = \frac{GD}{GA},$$ $$\frac{GL}{a} = \frac{2a}{\sqrt{5} \cdot a},$$ $$GL = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}a.$$	1 pont
Mivel $PC = GC = a$, ezért a PGC háromszög egyenlő szárú, valamint CL a háromszög alaphoz tartozó magassága, így $PL = GL = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}a$.	1 pont
Az AP szakasz hossza $AP = AG - GL - PL = \sqrt{5} \cdot a - 2 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}a = \frac{\sqrt{5}}{5}a$.	1 pont
Az ATP és GLC háromszögek szögei páronként megegyeznek, ezért a két háromszög hasonló egymáshoz. A megfelelő oldalaik aránya	1 pont

$$\frac{AT}{GL}=\frac{AP}{GC'}$$ amiből $$\frac{AT}{AP}=\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}.$$	
Az *AT* szakasz hossza $AT=\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}a=\frac{2}{5}a$.	1 pont
Az *ATP* derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétele alapján $PT=\sqrt{AP^2-AT^2}$, amiből $PT=\sqrt{\frac{1}{5}a^2-\frac{4}{25}a^2}=\frac{1}{5}a$.	1 pont
Az *AEP* háromszög területe $$T_{AEP}=\frac{AE\cdot PT}{2}=\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{5}}{2}=\frac{a^2}{20}.$$	2 pont
Az *AEP* háromszög és az *ABCD* négyzet területének aránya $\frac{1}{20}$.	1 pont
Összesen:	**10 pont**