

11. évfolyam technikum

I. forduló

1. A legutóbbi önkormányzati választásokon egy falu szavazásra jogosult lakói közül a nőknek 66%-a, a férfiaknak mindössze 20%-a ment el szavazni. A faluban 176-tal több nő szavazhat, mint férfi. Hányan jogosultak szavazni a faluban, ha a szavazáson a részvételi arány 45%-os volt? **(10 pont)**

2. Egy amatőr fallabda bajnokságban bármely két versenyző pontosan egyszer játszik egymással. Ha a bajnokságra 1-gyel több versenyző nevezett volna, akkor 105-nél is több mérkőzést kellett volna lebonyolítani. Amikor az összes játszmáknak pontosan a harmadát lejátszották, akkor még mindig 40-nél kevesebb mérkőzés zajlott csak le. Hány versenyző indult a bajnokságon? **(10 pont)**

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$4x^4 = 9x^2 + 12x + 4$$

(10 pont)

4. Az ABC háromszög AB , illetve AC oldalának A -hoz legközelebbi negyedelőpontja D , illetve E , a DE szakasz felezőpontja P . Határozzuk meg a BCP és az ABC háromszögek területének arányát. **(10 pont)**

5. Az a, b, c, d páronként különböző pozitív egész számokra képezzük az

$$X = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$$

szorzatot.

- a) Bizonyítsuk be, hogy az X szám többszöröse a 3-nak.
b) A 2-nek melyik az a legnagyobb pozitív egész kitevős hatványa, amellyel az X biztosan osztható?

(10 pont)

6. Az ABC háromszög oldalainak hossza: $AB = 8, AC = BC = \sqrt{80}$, a háromszög egy belső P pontja az A csúctól $\sqrt{8}$, a B csúctól $\sqrt{40}$ egység távolságra található. Mekkora távolságra van a P pont a háromszög C csúcsától?

(10 pont)

11. évfolyam technikum, I. forduló

Pontozási útmutató

1. A legutóbbi önkormányzati választásokon egy falu szavazásra jogosult lakói közül a nőknek 66%-a, a férfiaknak mindössze 20%-a ment el szavazni. A faluban 176-tal több nő szavazhat, mint férfi. Hányan jogosultak szavazni a faluban, ha a szavazáson a részvételi arány 45%-os volt?

Jelölje a szavazásra jogosult férfiak számát x . Ekkor a szavazásra jogosult nők száma $x + 176$, az összes szavazásra jogosultak száma pedig $2x + 176$.	1 pont
Mivel a szavazáson a részvételi arány 45%-os volt, ezért a szavazáson összesen $0,45 \cdot (2x + 176)$ ember szavazott.	1 pont
A szavazáson $0,66 \cdot (x + 176)$ nő, valamint $0,2 \cdot x$ férfi vett részt.	2 pont
A feltételek alapján felírható egyenlet: $0,66 \cdot (x + 176) + 0,2 \cdot x = 0,45 \cdot (2x + 176).$	2 pont
A zárójelek felbontása, majd az egyenemű tagok összevonása után $0,86 \cdot x + 116,16 = 0,9 \cdot x + 79,2.$	1 pont
A kapott egyenlet megoldása $x = 924$.	1 pont
A faluban összesen $2 \cdot 924 + 176 = 2024$ -en jogosultak szavazni.	1 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy a kapott eredmény valóban megoldása a feladatnak.	1 pont
Összesen:	10 pont

2. Egy amatőr fallabda bajnokságban bármely két versenyző pontosan egyszer játszik egymással. Ha a bajnokságra 1-gyel több versenyző nevezett volna, akkor 105-nél is több mérkőzést kellett volna lebonyolítani. Amikor az összes játszmáknak pontosan a harmadát lejátszották, akkor még mindig 40-nél kevesebb mérkőzés zajlott csak le. Hány versenyző indult a bajnokságon?

Jelölje a versenyzők számát x . Ha 1-gyel több versenyző nevezett volna, akkor a mérkőzések száma $\frac{(x+1) \cdot x}{2}$ lett volna.	1 pont
A feltételek alapján $\frac{(x + 1) \cdot x}{2} > 105.$	1 pont
A műveletek elvégzése és rendezés után azt kapjuk, hogy $x^2 + x - 210 > 0.$	1 pont
A bal oldalon álló másodfokú kifejezés zérushelyei $x_1 = -15, x_2 = 14$, ezért az egyenlőtlenség (pozitív) megoldásaira $x > 14$.	2 pont
Az összes mérkőzések száma $\frac{x \cdot (x-1)}{2}$, ezért $\frac{x \cdot (x - 1)}{6} < 40,$	1 pont

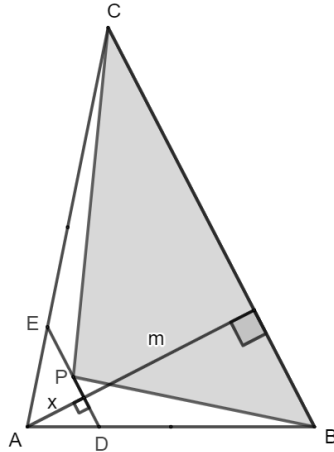
amiből	
$x^2 - x - 240 < 0.$	1 pont
A kapott másodfokú kifejezés zérushelyei $x_1 = -15, x_2 = 16$, így az egyenlőtlenség pozitív megoldásaira $x < 16$.	2 pont
A versenyen tehát összesen 15 versenyző indult. Ennek helyességét ellenőrzés mutatja.	1 pont
Összesen:	10 pont

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán. $4x^4 = 9x^2 + 12x + 4.$

Alakítsunk ki teljes négyzeteket az egyenlet mindkét oldalán: $(2x^2)^2 = (3x + 2)^2,$	3 pont
majd rendezzünk 0-ra és alakítsuk szorzattá a bal oldalon álló kifejezést: $(2x^2)^2 - (3x + 2)^2 = 0,$ $(2x^2 - 3x - 2) \cdot (2x^2 + 3x + 2) = 0.$	2 pont
A bal oldalon álló szorzat valamelyik tényezője 0, ezért $2x^2 - 3x - 2 = 0,$ vagy $2x^2 + 3x + 2 = 0.$	2 pont
Az első egyenlet gyökei $x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2}.$	1 pont
A második egyenlet diszkriminánsa negatív, ezért az egyenletnek nincs megoldása.	1 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy $x_1 = 2$, és $x_2 = -\frac{1}{2}$ valóban megoldása az egyenletnek.	1 pont
Összesen:	10 pont

4. Az ABC háromszög AB , illetve AC oldalának A -hoz legközelebbi negyedelőpontja D , illetve E , a DE szakasz felezőpontja P . Határozzuk meg a BCP és az ABC háromszögek területének arányát.

Az ábra jelöléseit követve az ABC háromszög BC oldalához tartozó magasságát m , az ADE háromszög ED oldalához tartozó magasságát x jelöli.



Az ADE és ABC háromszögek oldalaira

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4},$$

továbbá a két háromszög A csúcsnál lévő szöge közös, ezért

az ADE és ABC háromszögek hasonlóak egymáshoz.

A két háromszög hasonlóságának aránya $\lambda = \frac{1}{4}$,

ezért $\frac{x}{m} = \frac{1}{4}$, amiből $x = \frac{1}{4}m$.

A BCP háromszög magassága $m - x = m - \frac{1}{4}m = \frac{3}{4}m$,

így a BCP és ABC háromszögek területének arányára

$$\frac{T_{BCP}}{T_{ABC}} = \frac{\frac{BC \cdot \frac{3}{4}m}{2}}{\frac{BC \cdot m}{2}} = \frac{3}{4}.$$

Összesen: 10 pont

5. Az a, b, c, d páronként különböző pozitív egész számokra képezzük az

$$X = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$$

szorzatot.

- Bizonyítsuk be, hogy az X szám többszöröse a 3-nak.
- A 2-nek melyik az legnagyobb pozitív egész kitevős hatványa, amellyel az X biztosan osztható?

- a) Egy egész szám 3-as maradéka 0, 1, vagy 2 lehet,

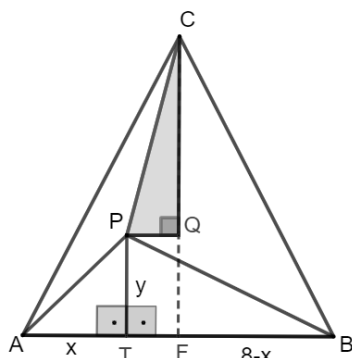
1 pont

ezért a skatulya-elv alapján az a, b, c, d számok közt biztosan van két olyan, amelyeknek 3-as maradéka megegyezik.	2 pont
Ennek a két számnak a különbsége biztosan osztható 3-mal, így X osztói közt van 3-mal osztható, ezért valóban a 3-nak egy többszöröse.	2 pont
b) Ha az a, b, c, d számok mindegyike páros, vagy mindegyike páratlan, akkor X minden tényezője páros, ezért X osztható 2^6 -nal. Ha az a, b, c, d számok közt egy páratlan és három páros, vagy egy páros és három páratlan szám van, akkor X tényezői közt három páros és három páratlan szám van, ezért X biztosan osztható 2^3 -nal. Végül pedig, ha az a, b, c, d számok közt kettő páros és kettő páratlan szám van, akkor X tényezői közt két páros és négy páratlan szám van, ezért X biztosan osztható 2^2 -nal.	4 pont*
Az $a = 4, b = 2, c = 1, d = 3$ számok mutatják, hogy vannak olyan a, b, c, d számok, amelyekre X nem osztható 2^3 -nal, ezért a 2-nek a második hatványa a legnagyobb, amivel X biztosan osztható.	1 pont
Összesen:	10 pont

Megjegyzés a *-gal megjelölt gondolati egységhez: A négy azonos paritású szám között vagy van két pár olyan, amelyeknek a 4-es maradéka megegyezik, vagy van három ilyen tulajdonságú szám. Így a különbségek közt legalább kettő 4-gyel is osztható, ezért X osztható 2^8 -nal is. A három páros (vagy három páratlan) szám közül kettőnek biztosan megegyezik a 4-es maradéka, így azok különbsége osztható 4-gyel is, így X osztható 2^4 -nel is. Ha a versenyző a fenti észrevételeket nem írja le, akkor is megadható a 4 pont.

6. Az ABC háromszög oldalainak hossza: $AB = 8, AC = BC = \sqrt{80}$, a háromszög egy belső P pontja az A csúctól $\sqrt{8}$, a B csúctól $\sqrt{40}$ egység távolságra található. Mekkora távolságra van a P pont a háromszög C csúcsától?

Ábrát készítünk a feladat szövege alapján. A P pontból az ABC háromszög alapjára állított merőleges talppontját T , az alaphoz tartozó CF magasságra emelt merőleges talppontját pedig Q jelöli. Legyen továbbá $PT = y$, $AT = x$. Ekkor $BT = 8 - x$.



Az APT és BPT derékszögű háromszögekben Pitagorasz tételét alkalmazva

$$x^2 + y^2 = 8,$$
 illetve

$$(8 - x)^2 + y^2 = 40.$$

A két egyenlet megfelelő oldalait egymásból kivonva azt kapjuk, hogy $x^2 - (8 - x)^2 = -32,$	1 pont
amiből a $16x - 64 = -32$ egyenlethez jutunk.	1 pont
A kapott egyenlet megoldása $x = 2$,	1 pont
amiből $y = 2$.	1 pont
Az ACF derékszögű háromszögben $AF^2 + CF^2 = 80,$ $4^2 + CF^2 = 80,$ $CF = 8.$	1 pont
A szintén derékszögű PCQ háromszögben $PQ = AF - x = 2$, valamint $CQ = CF - y = 6$, ezért Pitagorasz tétele alapján $CP^2 = 2^2 + 6^2 = 40,$ amiből $CP = \sqrt{40}$. A P pont a háromszög C csúcsától $\sqrt{40}$ egység távolságra van.	1 pont
Összesen:	10 pont

12. évfolyam technikum

I. forduló

1. Egy 5×5 -ös méretű négyzetrácson véletlenszerűen megjelölünk két 1×1 -es méretű rácsnégyzetet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
- mindkét négyzet a négyzetrács szélén van;
 - a kiválasztott négyzeteknek nincsen közös oldala?

(10 pont)

2. Melyik az a legkisebb pozitív egész n szám, amelyre a

$$\frac{2023! \cdot 2024!}{n}$$

tört értéke négyzetszám?

(10 pont)

3. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet.

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 450 \\ 3xy + 9y^2 = 450 \end{cases}$$

(10 pont)

4. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az x -tengelyt az origóban érinti, továbbá érinti az $O(5; 0)$ középpontú, 1 egység sugarú kört is.

(10 pont)

5. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$5^{10x+2} - 6 \cdot 5^{9x+1} + 5^{8x+1} = 0$$

(10 pont)

6. Az A , B és C pontok az adott sorrendben egy egyenesre illeszkednek. Az E és D pontok az egyenesnek ugyanazon az oldalán helyezkednek el úgy, hogy az ABE és a BCD háromszögek szabályosak. Az AD és CE szakaszok metszéspontja P .

- Bizonyítsuk be, hogy $AD=CE$.
- Bizonyítsuk be, hogy az $ABPE$ négyszög húrnégyszög.

(10 pont)

12. évfolyam technikum, I. forduló

Pontozási útmutató

1. Egy 5×5 -ös méretű négyzetrácson véletlenszerűen megjelölünk két 1×1 -es méretű rácsnégyzetet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
a) mindkét négyzet a négyzetrács szélén van;
b) a kiválasztott négyzeteknek nincsen közös oldala?

a) Az 5×5 -ös méretű négyzetrács összesen 25 darab 1×1 -es méretű rácsnégyzetet tartalmaz. Ezek közül 16 darab található a négyzetrács szélén.	1 pont
Két „kis négyzetet” összesen $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$ -féleképp lehet megjelölni a négyzetrácson.	2 pont
A kedvező esetek száma: $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$.	2 pont
Annak a valószínűsége, hogy mindkét négyzet a négyzetrács szélén van: $p = \frac{120}{300} = \frac{2}{5}.$	1 pont
b) Minden sorban 4 pár 1×1 -es méretű rácsnégyzet van, amelyeknek van közös oldala, így a sorokban összesen 20 pár ilyen négyzetet találunk. Ugyanígy 20 párat találunk az oszlopokban is, tehát összesen 40 olyan pár van, amelyeknek van közös oldala.	2 pont
Ebből következik, hogy azoknak a pároknak a száma, amelyeknek nincsen közös oldala $300 - 40 = 260$.	1 pont
A keresett valószínűség így $p = \frac{260}{300} = \frac{13}{15}.$	1 pont
Összesen:	10 pont

2. Melyik az a legkisebb pozitív egész n szám, amelyre a $\frac{2023! \cdot 2024!}{n}$ tört értéke négyzetszám?
--

Mivel $2024! = 2023! \cdot 2024$,	1 pont
és $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$,	1 pont
ezért a törtet felírhatjuk $\frac{(2023!)^2 \cdot 2^3 \cdot 11 \cdot 23}{n}$ alakban.	2 pont
A $(2023!)^2$ prímtényezős felbontásában szereplő prímek kitevője páros,	2 pont
ezért a tört számlálójában szereplő szorzat prímtényezős felbontásában a 2, a 11 és a 23 kitevője páratlan, a többi primé páros.	1 pont

Ahhoz, hogy a tört értéke négyzetszám legyen szükséges, hogy n prímtényezőss felbontásában a 2, a 11 és a 23 páratlan kitevőn szerepeljen.	2 pont
A legkisebb ilyen szám az $n = 2 \cdot 11 \cdot 23 = 506$.	1 pont
Összesen:	10 pont

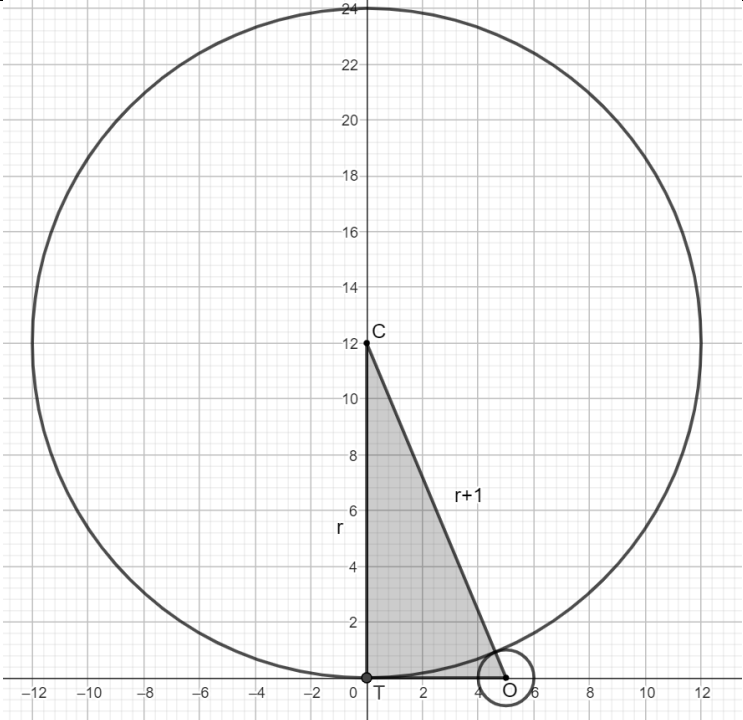
3. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet.

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = 450 \\ 3xy + 9y^2 = 450 \end{cases}$$

Az egyenletek bal oldalán álló kifejezések szorzattá bonthatók: $\begin{cases} x(x + 3y) = 450 \\ 3y(x + 3y) = 450 \end{cases}$	2 pont
Osszuk el az első egyenlet két oldalát a második egyenlet megfelelő oldalával, így azt kapjuk, hogy $\frac{x}{3y} = 1,$ $x = 3y.$	2 pont
Eredményünket az első egyenletbe helyettesítve $(3y)^2 + 9y^2 = 450,$ és így $y^2 = 25.$	2 pont
A fenti egyenlet megoldásai: $y = 5$, és $y = -5$.	2 pont
Az egyenletrendszernek két megoldása van: $x = 15, y = 5$, illetve $x = -15, y = -5$.	1 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy a kapott számok az egyenletrendszernek megoldásai.	1 pont
Összesen:	10 pont

4. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az x -tengelyt az origóban érinti, továbbá érinti az $O(5; 0)$ középpontú, 1 egység sugarú kört is.

A kör érintője merőleges az érintési ponthoz vezetett sugárra, valamint a kör az x -tengelyt az origóban érinti, ezért a kör középpontja az y -tengelyen van.	1 pont
Ha a keresett kör középpontja az y -tengely pozitív felén van, továbbá középpontját C , az origót pedig T jelöli, akkor az OCT derékszögű háromszög oldalai: $TC = r, TO = 5, CO = r + 1$.	2 pont

		
Írjuk fel Pitagorasz tételét az OCT háromszögre:	$r^2 + 5^2 = (r + 1)^2.$	2 pont
A műveletek elvégzése után	$r^2 + 25 = r^2 + 2r + 1,$	1 pont
amiből $r = 12$ adódik.		1 pont
A keresett kör egyenlete:	$x^2 + (y - 12)^2 = 144.$	1 pont
Ha a kapott kört az x -tengelyre tükrözzük, akkor olyan körhöz jutunk, amely szintén megfelel a feltételeknek, ezért a feladatnak két megoldása van.		1 pont
A másik megfelelő kör egyenlete:	$x^2 + (y + 12)^2 = 144.$	1 pont
Összesen:		10 pont

5. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

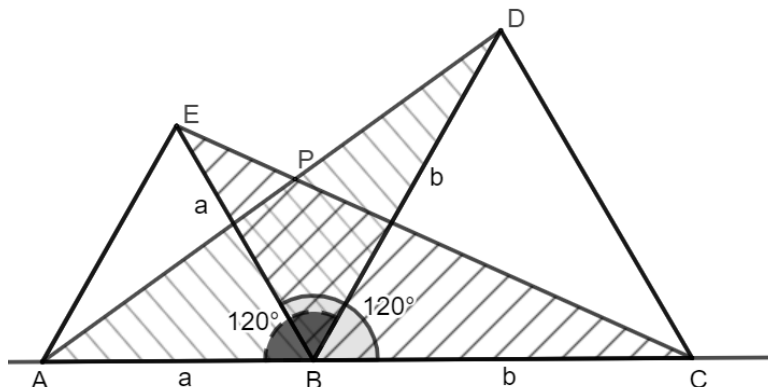
$$5^{10x+2} - 6 \cdot 5^{9x+1} + 5^{8x+1} = 0$$

Az egyenlet bal oldalán álló kifejezést a hatványozás azonosságai alapján átalakítjuk:		
$5^2 \cdot 5^{10x} - 6 \cdot 5 \cdot 5^{9x} + 5 \cdot 5^{8x} = 0,$		1 pont
majd kiemelünk:		
$5 \cdot 5^{8x} \cdot (5 \cdot 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 1) = 0.$		2 pont
Mivel $5^{8x} > 0$ minden x -re teljesül,		1 pont
ezért		
$5 \cdot 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 1 = 0.$		1 pont

A kapott egyenlet $y = 5^x$ -ben másodfokú,	1 pont
amelynek megoldásai $y = 1$ és $y = \frac{1}{5}$.	1 pont
Ha $5^x = 1$, akkor $x = 0$, és ha $5^x = \frac{1}{5}$, akkor $x = -1$.	
Az egyenletnek két megoldása van: $x = 0$, valamint $x = -1$.	2 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy a kapott gyökök az eredeti egyenletnek megoldásai.	1 pont
Összesen:	10 pont

6. Az A , B és C pontok az adott sorrendben egy egyenesre illeszkednek. Az E és D pontok az egyenesnek ugyanazon az oldalán helyezkednek el úgy, hogy az ABE és a BCD háromszögek szabályosak. Az AD és CE szakaszok metszéspontja P .
- a) Bizonyítsuk be, hogy $AD=CE$.
- b) Bizonyítsuk be, hogy az $ABPE$ négyszög húrnégyszög.

- a) Az ábrának megfelelően az AB hosszát a -val, a BC szakasz hosszát b -vel jelöljük.

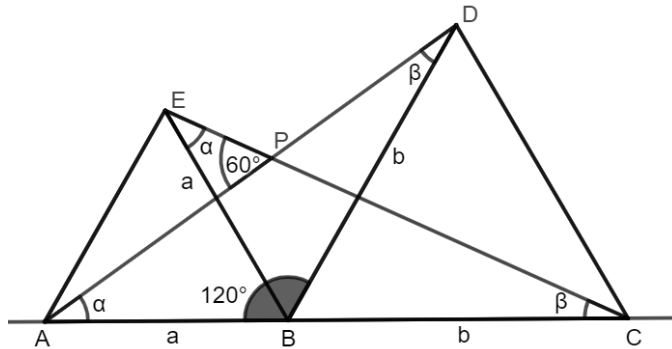


Az ABE és BCD háromszögek szabályosak, ezért $AB = BE = a$ és $BC = BD = b$, továbbá $\angle ABD = \angle EBC = 120^\circ$, így az ABD és EBC háromszögek két-két oldalban, valamint az általuk közre fogott szögben megegyeznek, ezért

az ABD és EBC háromszögek egybevágók egymással.

Az egybevágóságból következik, hogy harmadik oldaluk is megegyezik, azaz $AD = CE$.

b) Jelöljük az ABD háromszög hegyesszögeit az ábrának megfelelően α -val, illetve β -val. Ekkor $\alpha + \beta = 60^\circ$.



1 pont

Mivel az ABD háromszög egybevágó az EBC háromszöggel, ezért $BEC\angle = \alpha$ és $BCE\angle = \beta$ is teljesül.

1 pont

Ekkor viszont az ACP háromszög hegyesszögei α -val, illetve β -val egyenlők, ezért a P csúcsnál lévő külső szögére $APE\angle = \alpha + \beta = 60^\circ$.

1 pont

Az AE szakasz a B és P pontokból is 60° -os szög alatt látszik, ezért P és B illeszkedik az AE szakasz 60° -os látószögmérvére,

2 pont

amiből következik, hogy az $ABPE$ négyszög húrnégyszög.

1 pont

Összesen:

10 pont

Megjegyzés: A b) feladat első 3 pontját akkor is megkaphatja a versenyző, ha észreveszi, hogy az ABD háromszög a B csúcs körüli -60° -os forgatással vihető át az EBC háromszögbe, továbbá hivatkozik arra, hogy az AD szakasz és elforgatott képe, azaz az EC szakasz pontosan a forgatás szögét zárja be egymással.