

11. évfolyam gimnázium

I. forduló

1. Egy koncertre háromféle jegyet árúsítanak: ülőhelyes, állóhelyes és VIP-jegyet. Az eladott jegyek 20%-a VIP jegy, 10%-a ülőhelyes jegy. Ha a szervezők 3000 állóhelyes jeggyel többet tudtak volna eladni, akkor az eladott jegyek 75%-a lenne állóhelyes. Összesen hány jegyet adtak el a koncertre? **(10 pont)**

2. Bendegúz csomagautomatába rendelt egy csomagot, de a hat számjegyből álló nyitókódot elfelejtette. Arra azért emlékszik, hogy az első 5 szám közt két darab 0, két darab 5-ös és egy darab 7-es számjegy van, valamint a kód nem kezdődött a 0 számjeggyel. Azt is megjegyezte, hogy a hat számjegyből álló nyitókód osztható 3-mal. Mekkora a valószínűsége, hogy Bendegúz első próbálkozásra ki tudja nyitni az automatát, ha a feltételeknek megfelelő kóddal próbálkozik? **(10 pont)**

3. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$(x^2 - 2x - 8)^2 + (x^2 - x - 6)^2 = (x^2 - 4)^2$$

(10 pont)

4. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög BC oldalának felezőpontja P , EF oldalának felezőpontja Q .
a) Bizonyítsuk be, hogy az $APDQ$ négyszög rombusz.
b) Hányadrésze az $APDQ$ négyszög területe az $ABCDEF$ hatszög területének?

(10 pont)

5. Az f függvényt a valós számok halmazán a következő hozzárendelési szabállyal értelmezzük (p valós paraméter):

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x + 9} + p, & \text{ha } x < 0 \\ |x - 3| + 2p, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Ábrázoljuk a függvény grafikonját, ha a p paraméter értéke 0.
b) Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek pontosan három megoldása legyen.

(10 pont)

6. Az $ABCD$ téglalap oldalaira $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$, a téglalap átlóinak metszéspontja O . Az AOD háromszög beírt körének sugara r_1 , a DOC háromszögé r_2 . Határozzuk meg az $\frac{r_1}{r_2}$ arány pontos értékét. **(10 pont)**

11. évfolyam gimnázium, I. forduló

Pontozási útmutató

1. Egy koncertre háromféle jegyet árúsítanak: ülőhelyes, állóhelyes és VIP-jegyet. Az eladott jegyek 20%-a VIP jegy, 10%-a ülőhelyes jegy. Ha a szervezők 3000 állóhelyes jeggyel többet tudtak volna eladni, akkor az eladott jegyek 75%-a lenne állóhelyes. Összesen hány jegyet adtak el a koncertre?

Jelölje x az összes eladott jegyek számát. Ekkor a VIP jegyek száma $0,2x$, az ülőhelyes jegyek száma $0,1x$, az állóhelyes jegyek száma $0,7x$.	2 pont
Ha 3000 állóhelyes jeggyel többet tudtak volna eladni, akkor az eladott jegyek száma $x + 3000$ lett volna, ennek 75%-a $0,75(x + 3000)$.	2 pont
A feladat szövege alapján $0,7x + 3000 = 0,75(x + 3000),$	2 pont
amiből a zárójelek felbontása és rendezés után $0,05x = 750.$	1 pont
Az egyenlet megoldása $x = 15000$.	1 pont
A koncertre összesen 15000 jegyet adtak el.	1 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy ez valóban megoldása a feladatnak.	1 pont
Összesen:	10 pont

2. Bendegúz csomagautomatába rendelt egy csomagot, de a hat számjegyből álló nyitókódot elfelejtette. Arra azért emlékszik, hogy az első 5 szám közt két darab 0, két darab 5-ös és egy darab 7-es számjegy van, valamint a kód nem kezdődött a 0 számjeggyel. Azt is megjegyezte, hogy a hat számjegyből álló nyitókód osztható 3-mal. Mekkora a valószínűsége, hogy Bendegúz első próbálkozásra ki tudja nyitni az automatát, ha a feltételeknek megfelelő kóddal próbálkozik?

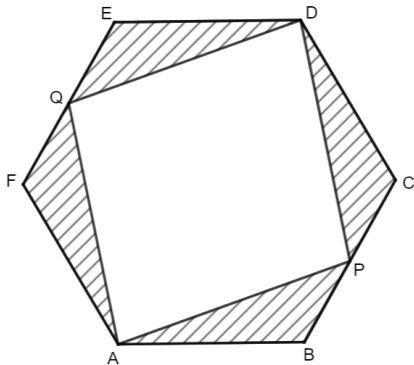
Az első öt helyen álló számjegyek összesen $\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30$ lehetséges módon rendezhetők sorba.	1 pont
Ebből 0-val kezdődik $\frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} = 12$.	2 pont
Az első öt számjegy összesen tehát $30 - 12 = 18$ -féleképpen helyezhető el.	2 pont
A megadott számjegyek összege 17, ezért a 3-mal való oszthatóság feltétele miatt az utolsó számjegy 1-es, 4-es vagy 7-es lehet.	2 pont
Az összes hatjegyű nyitókódok száma így $18 \cdot 3 = 54$.	1 pont
Annak a valószínűsége, hogy Bendegúz elsőre próbálkozásra ki tudja nyitni az automatát $\frac{1}{54}$.	2 pont
Összesen:	10 pont

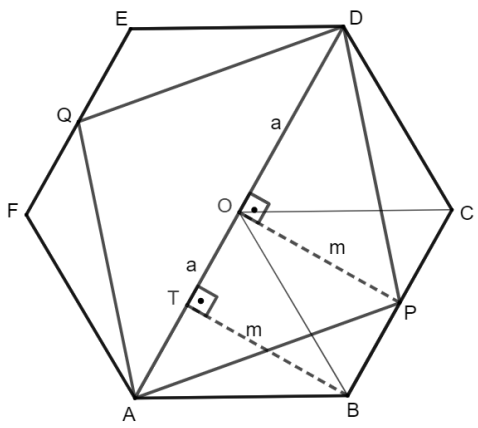
3. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$(x^2 - 2x - 8)^2 + (x^2 - x - 6)^2 = (x^2 - 4)^2$$

Alakítsuk szorzattá az egyenletben szereplő hatványok alapját: $x^2 - 2x - 8 = (x + 2) \cdot (x - 4)$.	1 pont
$x^2 - x - 6 = (x + 2) \cdot (x - 3)$.	1 pont
$x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$.	1 pont
A szorzatokat felhasználva az egyenlet az alábbi alakban írható: $(x + 2)^2 \cdot (x - 4)^2 + (x + 2)^2 \cdot (x - 3)^2 = (x + 2)^2 \cdot (x - 2)^2$.	1 pont
Az $x = -2$ megoldása az egyenletnek. Ha $x \neq -2$, akkor mindkét oldalt eloszthatjuk az $(x + 2)^2$ kifejezéssel, így	2 pont
$(x - 4)^2 + (x - 3)^2 = (x - 2)^2$.	1 pont
A műveletek elvégzése után az $x^2 - 10x + 21 = 0$ egyenlethez jutunk.	1 pont
A kapott másodfokú egyenlet gyökei $x = 7$ és $x = 3$.	1 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy mindhárom gyök megoldása az egyenletnek.	1 pont
Összesen:	10 pont

4. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög BC oldalának felezőpontja P , EF oldalának felezőpontja Q .
a) Bizonyítsuk be, hogy az $APDQ$ négyszög rombusz.
b) Hányadrésze az $APDQ$ négyszög területe az $ABCDEF$ hatszög területének?

a) Az ABP , DCP , DEQ , AFQ háromszögekben két-két oldal és az általuk bezárt szög megegyezik, ezért a háromszögek egybevágók.	
	2 pont
Az egybevágóságból adódik, hogy $AP = DP = DQ = AQ$,	1 pont
így az $APDQ$ négyszög oldalai megegyeznek, ezért $APDQ$ rombusz.	1 pont

b) Az ábra jelöléseit követve jelöljük az APD háromszög AD oldalhoz tartozó magasságát m-mel, az AO szakasz hosszát a-val. Ekkor $AD = 2a$, és az ABO háromszög AO oldalhoz tartozó BT magassága m. 	1 pont
Mivel $AD \parallel BC$, ezért $BT = OP = m$, így az APD háromszög területére $T_{APD} = \frac{2am}{2} = am,$ ezért az $APDQ$ rombusz területe $T_{APDQ} = 2am.$	2 pont
Az ABO háromszög területére $T_{ABO} = \frac{am}{2},$ ezért az $ABCDEF$ hatszög területe $T_{ABCDEF} = 6 \cdot T_{ABO} = 3am.$	2 pont
Az $APDQ$ rombusz és az $ABCDEF$ hatszög területének aránya $\frac{T_{APDQ}}{T_{ABCDEF}} = \frac{2am}{3am} = \frac{2}{3}.$	1 pont
Összesen:	10 pont

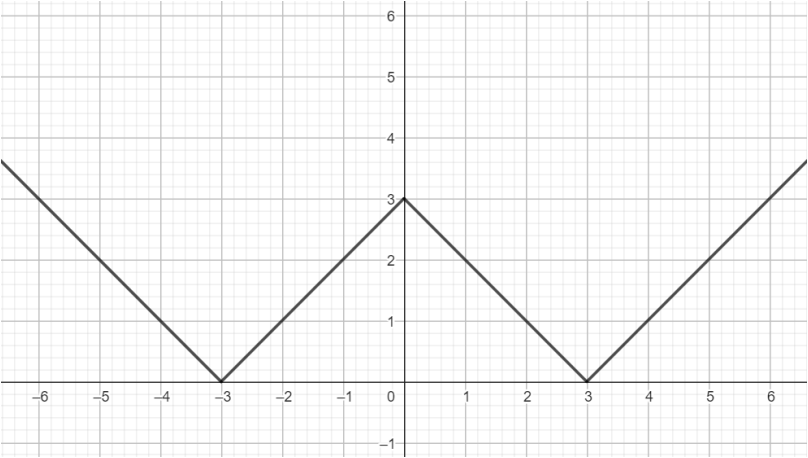
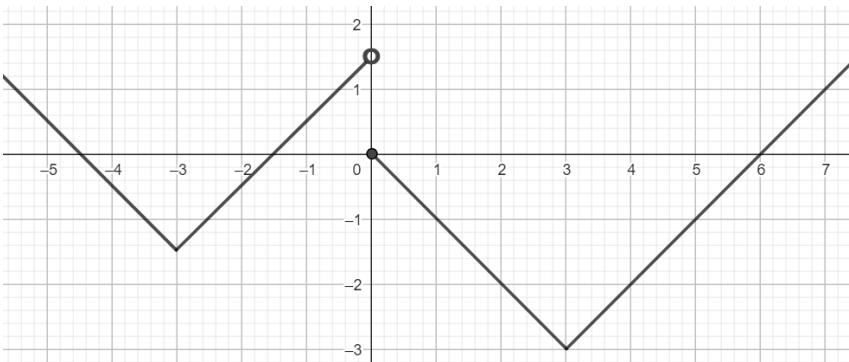
5. Az f függvényt a valós számok halmazán a következő hozzárendelési szabállyal értelmezzük (p valós paraméter):

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x + 9} + p, & \text{ha } x < 0 \\ |x - 3| + 2p, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Ábrázoljuk a függvény grafikonját, ha a p paraméter értéke 0.

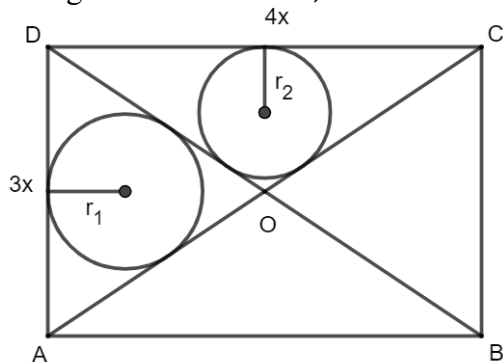
b) Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek pontosan három megoldása legyen.

a) Mivel $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{(x + 3)^2} = x + 3 $,	2 pont
---	--------

ezért ha $p = 0$, akkor a függvény hozzárendelési szabálya így alakul: $f(x) = \begin{cases} x + 3 , & \text{ha } x < 0 \\ x - 3 , & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$ A függvény grafikonja az ábrán látható. 	3 pont
b) Ha $p = 0$, akkor a függvénynek két zérushelye van. Ha $p > 0$, akkor $f(x) > 0$, így a függvénynek nincs zérushelye.	1 pont
Ha $p < 0$, akkor az $x \mapsto x + 3$ ($x < 0$) és az $x \mapsto x - 3$ ($x \geq 0$) függvények grafikonját is lefelé kell eltolni. Ha $0 > p \geq -\frac{3}{2}$, akkor a függvény mindkét „ága” két helyen metszi az x-tengelyt, azaz négy zérushely van. Az ábra a $p = -\frac{3}{2}$ esetét mutatja. 	1 pont
Ha $-\frac{3}{2} > p > -3$, akkor az $x \mapsto x + 3 + p$ ($x < 0$) függvénynek két, az $x \mapsto x - 3 + 2p$ ($x \geq 0$) függvénynek egy zérushelye van, azaz összesen három zérushely adódik.	1 pont
Ha $p \leq -3$, akkor a függvénynek két zérushelye van.	1 pont
Összefoglalva: ha $p \in \left]-3; -\frac{3}{2}\right]$, akkor a függvénynek három zérushelye van.	1 pont
Összesen:	10 pont

6. Az $ABCD$ téglalap oldalaira $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$, a téglalap átlóinak metszéspontja O . Az AOD háromszög beírt körének sugara r_1 , a DOC háromszögé r_2 . Határozzuk meg az $\frac{r_1}{r_2}$ arány pontos értékét.

Az ábra jelöléseinek megfelelően $AB = 4x$, $BC = 3x$ alakban írható.



1 pont

Ekkor az ACD háromszögben Pitagorasz tétele alapján $AC = 5x$.

1 pont

Az AOD háromszög kerületének felére

$$s_1 = \frac{AO + OD + DA}{2} = \frac{\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}x + 3x}{2} = 4x,$$

1 pont

területére

$$T_1 = \frac{T_{ABCD}}{4} = \frac{3x \cdot 4x}{4} = 3x^2$$

teljesül.

1 pont

Az AOD háromszög beírt körének sugara

$$r_1 = \frac{T_1}{s_1} = \frac{3x^2}{4x} = \frac{3}{4}x.$$

2 pont

Hasonlóan látható, hogy a DOC háromszög kerületének fele

$$s_2 = \frac{9}{2}x,$$

területe

$$T_2 = 3x^2.$$

1 pont

A DOC háromszög beírt körének sugara

$$r_2 = \frac{T_2}{s_2} = \frac{3x^2}{\frac{9}{2}x} = \frac{2}{3}x.$$

1 pont

A két kör sugarának aránya

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\frac{3}{4}x}{\frac{2}{3}x} = \frac{9}{8}.$$

2 pont

Összesen:

10 pont

12. évfolyam gimnázium

I. forduló

1. Egy társasjátékhoz dobókocka helyett szabályos oktaéder alakú dobótestet használnak. Az oktaédert nyolc (egybevágó) szabályos háromszöglap határolja, és a felső lapján megjelenő számot tekintik a dobás eredményének. A dobótest minden lapjára ugyanakkora valószínűséggel esik. Az oktaéder egyetlen lapjára írtak 1-es számot, néhány további lapjára 2-est, a maradék lapokra 3-ast. A test hány lapján szerepelhet a 2-es szám, ha $\frac{3}{16}$ annak a valószínűsége, hogy két egymás utáni dobás során pontosan egyszer dobunk 2-est és egyszer 3-ast?
(10 pont)
2. A pozitív egész n szám pozitív osztóinak szorzata 2^{210} . Bizonyítsuk be, hogy n felírható egy egész szám negyedik, illetve egy másik egész szám ötödik hatványaként.
(10 pont)
3. Egy osztály tanulói három nyelvet tanulnak: angolt, németet és franciát. Angolul 18-an, németül 14-en és franciául 10-en tanulnak. Ebben az osztályban nincs olyan tanuló, aki mindhárom nyelvet tanulja, és mindössze 6 olyan tanuló van, aki csak franciául tanul. Legkevesebb hány tanuló jár az osztályba?
(10 pont)
4. Az ABC háromszög két csúcspontjának koordinátái: $A(0; -5)$, $B(4; -3)$. A háromszög C csúcsa az $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$ egyenletű körön mozog. Milyen határok közt változik az ABC háromszög területe?
(10 pont)
5. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.
$$(3^x - 1)^2 + (7^x - 49)^2 = (3^x + 7^x - 50)^2$$

(10 pont)
6. Az ABC háromszög egy belső pontja P . A PA , PB , PC szakaszok felezőpontja rendre D , E és F . A CD és AF szakaszok metszéspontja R , ehhez hasonlóan az AE és BD szakaszok metszéspontja S , és a BF és CE szakaszok metszéspontja T . Bizonyítsuk be, hogy a $DSETFR$ hatszög területe a P pont választásától független állandó.
(10 pont)

12. évfolyam gimnázium, I. forduló

Pontozási útmutató

1. Egy társasjátékhoz dobókocka helyett szabályos oktaéder alakú dobótestet használnak. Az oktaédert nyolc (egybevágó) szabályos háromszöglap határolja, és a felső lapján megjelenő számot tekintik a dobás eredményének. A dobótest minden lapjára ugyanakkora valószínűséggel esik. Az oktaéder egyetlen lapjára írtak 1-es számot, néhány további lapjára 2-est, a maradék lapokra 3-ast. A test hány lapján szerepelhet a 2-es szám, ha $\frac{3}{16}$ annak a valószínűsége, hogy két egymás utáni dobás során pontosan egyszer dobunk 2-est és egyszer 3-ast?

Ha az oktaéder n lapján a 2-es szám szerepel, akkor $7 - n$ lapján szerepel a 3-as szám.	1 pont
Annak a valószínűsége, hogy két egymás utáni dobás során először 2-est, majd 3-ast dobunk $\frac{n}{8} \cdot \frac{7-n}{8}$.	
Ugyanennyi a valószínűsége annak is, hogy először dobunk 3-ast, aztán 2-est.	2 pont
A feladat feltételei alapján $2 \cdot \frac{n}{8} \cdot \frac{7-n}{8} = \frac{3}{16}$	2 pont
A műveletek elvégzése és rendezés után az $n^2 - 7n + 6 = 0$ egyenlethez jutunk.	2 pont
Az egyenlet megoldásai: $n = 1$ és $n = 6$.	1 pont
Az oktaéder 1 vagy 6 lapján szerepel a 2-es szám.	1 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy mindkét eredmény megfelel a feladat feltételeinek.	1 pont
Összesen:	10 pont

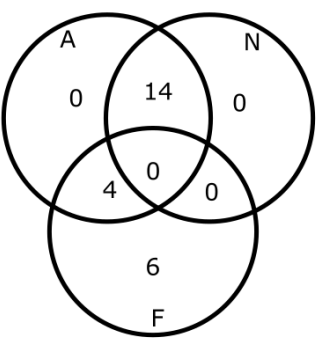
2. A pozitív egész n szám pozitív osztóinak szorzata 2^{210} . Bizonyítsuk be, hogy n felírható egy egész szám negyedik, illetve egy másik egész szám ötödik hatványaként.

Mivel az n szám osztóinak szorzata 2-hatvány, az csak úgy lehetséges, ha n is 2-hatvány, tehát valamilyen pozitív egész k számra $n = 2^k$.	1 pont
Az n szám pozitív osztói: $1, 2, 2^2, \dots, 2^k$,	1 pont
ezért a pozitív osztók szorzata: $1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^k = 2^{1+2+\dots+k}$.	1 pont
A kitevőben számtani sorozat tagjai szerepelnek, így azt kapjuk, hogy $2^{\frac{k(k+1)}{2}} = 2^{210},$ illetve $\frac{k(k+1)}{2} = 210.$	2 pont

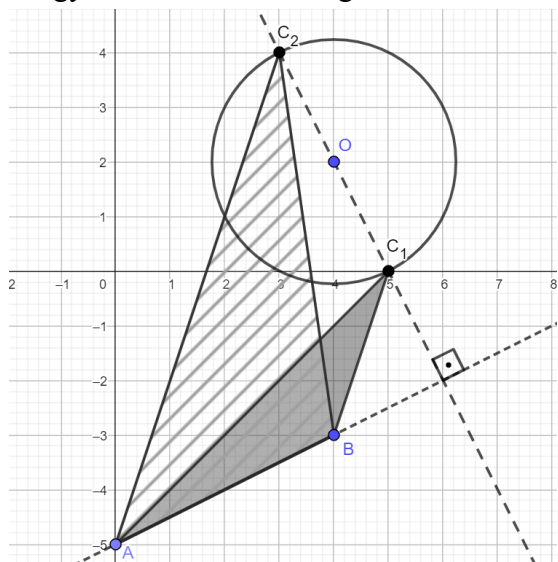
A műveletek elvégzése és rendezés után a $k^2 + k - 420 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk.	2 pont
Az egyenlet megoldásai $k = 20$ és $k = -21$.	1 pont
Mivel k pozitív egész, ezért $k = 20$. Ekkor $n = 2^{20}$, ami felírható $n = (2^5)^4$, illetve $n = (2^4)^5$ alakban is, így n valóban egy egész szám negyedik és egy másik egész szám ötödik hatványa is egyben.	2 pont
Összesen:	10 pont

3. Egy osztály tanulói három nyelvet tanulnak: angolt, németet és franciát. Angolul 18-an, németül 14-en és franciául 10-en tanulnak. Ebben az osztályban nincs olyan tanuló, aki mindhárom nyelvet tanulja, és mindössze 6 olyan tanuló van, aki csak franciául tanul. Legkevesebb hány tanuló jár az osztályba?

Jelölje A az angolul, N a németül, F a franciául tanulók halmazát. Az egyes részhalmazok elemszámát a Venn-diagram jelöléseinek megfelelően használjuk. Ekkor a feltételek szerint teljesülnek az alábbi egyenlőségek. $\begin{cases} a + x + y = 18 \\ b + x + z = 14 \\ y + z + 6 = 10 \end{cases}$	1 pont
Az osztályba legalább $N = a + b + x + y + z + 6$ tanuló jár.	1 pont
Adjuk össze az egyenletek megfelelő oldalait: $a + b + 2(x + y + z) + 6 = 42.$	1 pont
Mindkét oldalból kivonva az $x + y + z$ összeget: $N = 42 - (x + y + z)$ adódik.	1 pont
Az osztályba járó tanulók száma akkor minimális, amikor az $x + y + z$ összeg a lehető legnagyobb. Az egyenletrendszer harmadik egyenletéből következik, hogy $y + z = 4$, ezért $x + y + z = 4 + x$, és az összeg akkor a legnagyobb, amikor x maximális.	2 pont
Mivel németül 14-en tanulnak, ezért x legnagyobb értéke 14.	1 pont
Ekkor az osztály létszáma legalább $42 - (14 + 4) = 24$ fő.	1 pont

Az alábbi halmazábra mutatja, hogy ez valóban meg is valósulhat. 	2 pont
Összesen:	10 pont

4. Az ABC háromszög két csúcspontjának koordinátái: $A(0; -5), B(4; -3)$. A háromszög C csúcsa az $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$ egyenletű körön mozog. Milyen határok közt változik az ABC háromszög területe?

Az adott kör O középpontja $O(4; 2)$, sugara $r = \sqrt{5}$.	1 pont
Az ABC háromszög AB oldala a C pont választásától függetlenül $AB = 2 \cdot \sqrt{5}$.	1 pont
Ebből következik, hogy az ABC háromszög területe akkor a lehető legkisebb, ha a C pont az adott kör AB egyeneshez legközelebbi pontja (az ábrán C_1), a minimális területű háromszög magassága pedig pontosan az adott kör sugarával kisebb az O pont AB egyenestől való távolságánál. 	1 pont
Az ABC háromszög területe akkor a legnagyobb, ha a körön lévő pontja (a fenti ábrán C_2) egybeesik a minimális területű háromszöghöz tartozó C_1 csúcs O pontra vonatkozó tükörképével, magassága pedig a kör sugarával nagyobb az O pont AB egyenestől való távolságánál.	1 pont
Az AB egyenes irányvektora $\overrightarrow{AB}(4; 2)$, egyenlete pedig $x - 2y - 10 = 0$.	1 pont

Az O pont és az AB egyenes távolsága a pont és egyenes távolságképlete alapján $d = \left \frac{1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 - 10}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \right = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2 \cdot \sqrt{5}.$	2 pont
A minimális területű ABC_1 háromszög magassága $d - r = 2 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$, területe $T_{min} = \frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{2} = 5.$ A maximális területű ABC_2 háromszög magassága $d + r = 2 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} = 3 \cdot \sqrt{5}$, területe $T_{max} = \frac{2 \cdot \sqrt{5} \cdot 3 \cdot \sqrt{5}}{2} = 15.$	2 pont
Az ABC háromszög területe az $[5; 15]$ intervallumban változik.	1 pont
Összesen:	10 pont

Megjegyzés: A versenyző a C_1 , C_2 pontok koordinátáinak kiszámításával is megadhatja a minimális, illetve a maximális területű háromszög területét. A maximális pontszámot ebben az esetben is megkaphatja, ha

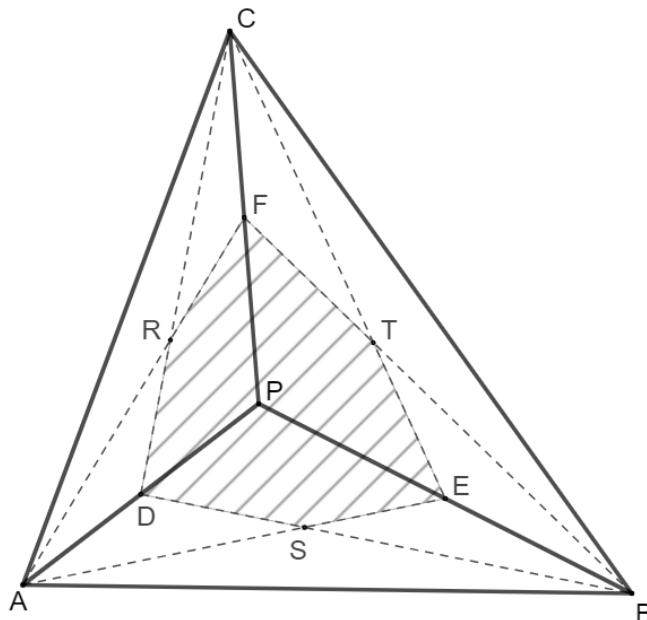
- felírja az O pont koordinátáit (a kör sugarára nincs szükség), és kiszámítja az AB szakasz hosszát (1 pont)
- megállapítja, hogy C_1C_2 merőleges az AB egyenesre (1 pont)
- felírja az AB egyenes egyenletét (1 pont)
- felírja a C_1C_2 egyenes egyenletét: $2x + y = 10$ (1 pont)
- kiszámítja a két egyenes metszéspontjának koordinátáit: $(6; -2)$ (1 pont)
- kiszámítja a C_1 és C_2 pontok koordinátáit: $C_1(5; 0)$, $C_2(3; 4)$ (2 pont)
- kiszámítja a minimális és a maximális területű háromszög magasságát, területét (2 pont)
- megadja a megfelelő intervallumot (1 pont).

5. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán. $(3^x - 1)^2 + (7^x - 49)^2 = (3^x + 7^x - 50)^2$
--

Vezessünk be új ismeretleneket a bal oldalon szereplő hatványok alapjaira, legyen $a = 3^x - 1$ és $b = 7^x - 49$. Ekkor a jobb oldalon álló hatvány alapjára $3^x + 7^x - 50 = a + b$.	2 pont
Az egyenlet $a^2 + b^2 = (a + b)^2$ alakban írható.	1 pont
A műveletek elvégzése és összevonás után azt kapjuk, hogy $ab = 0.$	2 pont
Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, azaz $a = 0$, vagy $b = 0$.	2 pont
Ha $a = 3^x - 1 = 0$, akkor $x = 0$.	1 pont
Ha $b = 7^x - 49 = 0$, akkor $x = 2$.	1 pont
A kapott gyökök helyességét ellenőrzés mutatja.	1 pont
Összesen:	10 pont

6. Az ABC háromszög egy belső pontja P . A PA , PB , PC szakaszok felezőpontja rendre D , E és F . A CD és AF szakaszok metszéspontja R , ehhez hasonlóan az AE és BD szakaszok metszéspontja S , és a BF és CE szakaszok metszéspontja T . Bizonyítsuk be, hogy a $DSETFR$ hatszög területe a P pont választásától független állandó.

Ábrát készítettünk a feladat szövege alapján.



1 pont

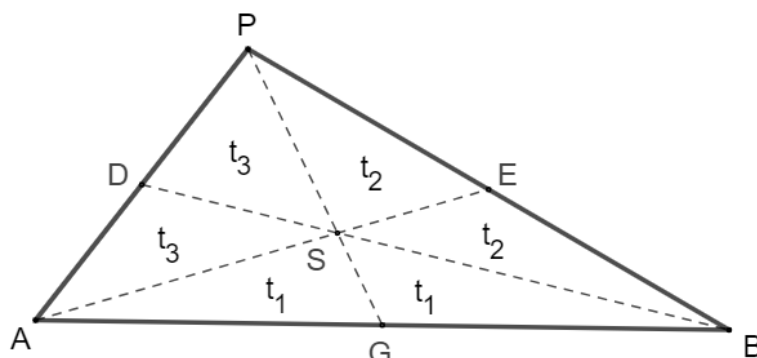
Az AE és a BD szakasz súlyvonal az ABP háromszögben, ezért az S egybeesik az ABP háromszög súlypontjával. Ugyanígy T súlypont a BCP háromszögben, és R súlypont a CAP háromszögben.

1 pont

A háromszög súlyvonalai a háromszöget egyenlő területű részekre bontják.

2 pont

Ennek bizonyításához tekintsük az ABP háromszöget és az alábbi ábra jelöléseit.



A háromszög súlyvonala megfelezi a háromszög területét, hiszen például SG súlyvonal az ABS háromszögben, ezért $AG = BG$, továbbá az AGS és BGS háromszögek AG és BG oldalakhoz tartozó magassága is megegyezik, így a két háromszög területe valóban egyenlő. Az egyenlő területet az ábrán t_1 -gyel jelöltük.

1 pont

Ugyanígy megegyezik a BES és PES háromszögek területe (t_2), valamint a PDS és ADS háromszögek területe (t_3).

1 pont

A PG szakasz súlyvonal az ABP háromszögben, ezért az AGP és BGP háromszögek területe is megegyezik, azaz $t_1 + 2t_3 = t_1 + 2t_2,$ amiből következik, hogy $t_2 = t_3.$ Ugyanígy belátható, hogy $t_1 = t_3$, azaz a súlyvonalak valóban egyenlő területű részekre bontják a háromszöget.	1 pont
A fentiek következményeként $T_{DSEP} = \frac{1}{3} \cdot T_{PAB}.$	1 pont
Ugyanígy $T_{ETFP} = \frac{1}{3} \cdot T_{PBC},$ és $T_{FRDP} = \frac{1}{3} \cdot T_{PCA}.$ Az utolsó három egyenlőség megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy $\frac{T_{DSETFR}}{T_{ABC}} = \frac{1}{3},$ ami mutatja, hogy a $DSETFR$ hatszög területe a P pont helyzetétől függetlenül az ABC háromszög területének harmada.	2 pont
Összesen:	10 pont

Megjegyzés: Ha a versenyző bizonyítás nélkül hivatkozik arra, hogy a háromszög súlyvonalai a háromszöget egyenlő területű részekre bontják, akkor legfeljebb 7 pontot kaphat.