

11. évfolyam technikum

I. forduló

1. Egy utcában két parkolóautomata van, mindegyiknél csak pénzérmékkel lehet fizetni. A második automatában 4%-kal több érme van, mint az elsőben. Ha az első automatából kivennék az érmék 48%-át, a másodikból pedig 260 darabot, akkor az első és a második automatában maradó érmék számának aránya 3:4 lenne. Hány pénzérmé van az egyes automataokban?

(10 pont)

2. Zsófi szabályos dobókockával egymás után addig dob, amíg valamelyik számot negyedszerre dobja. Dobásainak eredményét egymás mellé lejegyzí.
- a) Hány olyan dobássorozat van, amelyik pontosan 19 dobás után ér véget?
- b) Mi lehet a Zsófi által utoljára dobott szám, ha összesen 18-szor dobott és a lejegyzett számok összege 68?

(10 pont)

3. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{2x^2 - 8}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+5}} = \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$$

(10 pont)

4. Legyen A azoknak a pozitív háromjegyű számoknak a halmaza, amelyeknek az utolsó számjegye 0-tól különböző. Az A halmaz minden x eleméhez hozzárendeljük az $|x - y|$ értéket, ahol y az x számjegyeinek megfordításával kapott háromjegyű számot jelöli. Például az 532-höz az $|532 - 235| = 297$ számot rendeljük.
- a) Hány olyan eleme van az A halmaznak, amelyikhez hozzárendelt érték osztható 6-tal?
- b) Adjuk meg azoknak a számoknak a halmazát, amelyeket valamelyik háromjegyű számhoz hozzárendeltünk.

(10 pont)

5. Egy 2 egység oldalú $ABCD$ négyzet BC , illetve CD oldalának felezőpontja rendre E és F . A négyzet BD átlója az AE szakaszt H -ban, az AF szakaszt G -ben metszi. Számítsuk ki az $EFGH$ négyszög és az $ABCD$ négyzet területének arányát.

(10 pont)

6. Határozzuk meg azokat a $(b; c)$ számpárokat, amelyek mindkét tagja 100-nál nem nagyobb pozitív egész szám, és amelyre az

$$f(x) = x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x$$

hozzárendelési szabállyal értelmezett függvénynek két (különböző) zérushelye van.

(10 pont)

11. évfolyam technikum, I. forduló

Pontozási útmutató

1. Egy utcában két parkolóautomata van, mindegyiknél csak pénzérmékkel lehet fizetni. A második automatában 4%-kal több érme van, mint az elsőben. Ha az első automatából kivennék az érme 48%-át, a másodikkól pedig 260 darabot, akkor az első és a második automatában maradó érme számának aránya 3:4 lenne. Hány pénzérmé van az egyes automatákban?

Jelölje az első automatában lévő érme számát x . Ekkor a második automatában lévő érme száma $1,04x$.	1 pont
Ha az első automatából kivennék az érme 48%-át, a másodikkól pedig 260 darabot, akkor az elsőben $0,52x$, a másodikkban $1,04x - 260$ darab érme maradna.	2 pont
A feltételek alapján felírható egyenlet: $\frac{0,52x}{1,04x - 260} = \frac{3}{4}$	2 pont
A nevezőkkel való szorzás után adódik, hogy $2,08x = 3,12x - 780.$	1 pont
A kapott egyenlet megoldása $x = 750$.	1 pont
Az első automatában 750 darab, a másodikkban 780 darab érme van.	2 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy a kapott eredmény valóban megoldása a feladatnak.	1 pont
Összesen:	10 pont

2. Zsófi szabályos dobókockával egymás után addig dob, amíg valamelyik számot negyedszerre dobja. Dobásainak eredményét egymás mellé lejegyzí.
- a) Hány olyan dobássorozat van, amelyik pontosan 19 dobás után ér véget?
- b) Mi lehet a Zsófi által utoljára dobott szám, ha összesen 18-szor dobott és a lejegyzett számok összege 68?

a) A dobássorozat csak úgy lehet 19 hosszúságú, ha az utolsónak dobott számot 4-szer, a többit 3-szor dobjuk.	1 pont
Az első 18 dobás során mind a 6 számot 3-szor kell dobunk, ezért az első 18 dobás lehetőségeinek száma $\frac{18!}{(3!)^6}$	2 pont
Az utolsó dobás a 6 szám közül bármelyik lehet,	1 pont
ezért a 19 dobás után véget érő dobássorozatok száma $6 \cdot \frac{18!}{(3!)^6}$	1 pont

b) Jelölje a Zsófi által 4-szer dobott számot x . Ekkor Zsófi a többi (x -től különböző) számot összesen 14-szer dobta, ami csak úgy lehetséges, ha az egyik számot 2-szer, a többi négyet 3-szor dobta.	1 pont
Jelölje y azt a számot, amit csak 2-szer dobott. Ekkor az első 17 dobás közt csak az y -szerepel 2-szer, a többi 3-szor, ezért az első 17 dobásának összege $3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - y = 63 - y,$	2 pont
így az összes dobásának összegére $63 - y + x = 68,$ amiből $x - y = 5$.	1 pont
Ennek egyetlen megoldása $x = 6$, $y = 1$, ezért Zsófi utoljára csak 6-ost dobhatott.	1 pont
Összesen:	10 pont

3. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{2x^2 - 8}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+5}} = \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$$

Megvizsgáljuk az egyenlet értelmezési tartományát. A négyzetgyökös kifejezések, valamint a törtek miatt $x > 1$, $x > -5$ és $x^2 + 4x - 5 > 0$.	1 pont
A kapott másodfokú egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés szorzattá bontott alakja $x^2 + 4x - 5 = (x - 1) \cdot (x + 5)$, ezért az egyenlőtlenség megoldása $x > 1$ vagy $x < -5$.	1 pont
Összevetve a kapott feltételeket kapjuk, hogy $x > 1$ esetén értelmezhető mindegyik kifejezés.	1 pont
Az egyenletben szereplő másodfokú kifejezések szorzattá alakítása után az egyenlet a $\frac{2(x-2)(x+2)}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+5}} = \frac{(x+3)(x-2)}{\sqrt{(x-1)(x+5)}}$ alakban írható.	2 pont
Az értelmezési tartományon a két oldal nevezője megegyezik, ezért $2(x-2)(x+2) = (x+3)(x-2).$	1 pont
Nullára redukálás és kiemelés után kapjuk, hogy $(x-2)(2x+4-x-3) = 0,$ $(x-2)(x+1) = 0.$	1 pont
Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.	1 pont
Az $x > 1$ feltételnek x_2 nem tesz eleget, ezért az egyenlet egyetlen megoldása $x = 2$.	1 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy a kapott eredmény valóban megoldása a feladatnak.	1 pont
Összesen:	10 pont

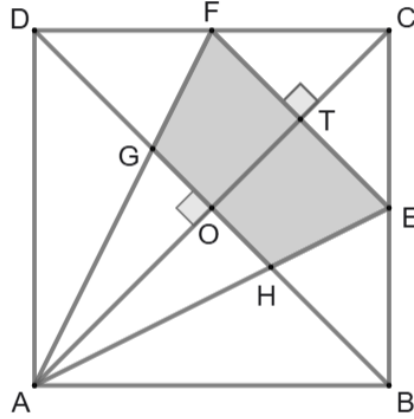
4. Legyen A azoknak a pozitív háromjegyű számoknak a halmaza, amelyeknek az utolsó számjegye 0-tól különböző. Az A halmaz minden x eleméhez hozzárendeljük az $|x - y|$ értéket, ahol y az x számjegyeinek megfordításával kapott háromjegyű számot jelöli. Például az 532-höz az $|532 - 235| = 297$ számot rendeljük.
- a) Hány olyan eleme van az A halmaznak, amelyekhez hozzárendelt érték osztható 6-tal?
- b) Adjuk meg azoknak a számoknak a halmazát, amelyeket valamelyik háromjegyű számhoz hozzárendeltünk.

a) Legyen x az A halmaz egy eleme. Ekkor $x = \overline{abc}$ egy háromjegyű szám, amelyre $a \neq 0, c \neq 0$ teljesül. Az x szám értéke: $x = 100a + 10b + c$. Az x -hez tartozó y : $y = \overline{cba} = 100c + 10b + a$,	1 pont
végül az x -hez hozzárendelt érték: $ x - y = 99(a - c) $.	1 pont
A 6-tal való oszthatóság feltétele a 2-vel és a 3-mal való oszthatóság. Mivel $99 = 3 \cdot 33$, ezért a kapott érték biztosan osztható 3-mal.	1 pont
Az $ x - y $ pontosan akkor osztható 2-vel, ha $a - c$ páros, amiből következik, hogy a és c azonos paritású. Összesen $5 \cdot 5 = 25$ olyan eset van, amikor mindkettő páratlan, és (tekintettel arra, hogy a és c 0-tól különböző) $4 \cdot 4 = 16$ olyan eset, amikor mindkettő páros.	2 pont
Mivel a középső számjegy (b) tetszőleges lehet, ezért a feltételeknek megfelelő számok száma $25 \cdot 10 + 16 \cdot 10 = 410$.	1 pont
b) Az A halmaz elemeihez azokat a számokat rendeltük, amelyek felírhatók $ 99(a - c) $ alakban, ahol a és c 0-tól különböző számjegyek. Az $ a - c $ lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.	2 pont
Az A elemeihez rendelt számok halmaza tehát $\{0; 99; 198; 297; 396; 495; 594; 693; 792\}$.	2 pont*
Összesen:	10 pont

Megjegyzés: A hozzárendelt számok halmazát nem szükséges elemeinek felsorolásával megadni. Bármilyen matematikailag szabatos megadási mód elfogadható.

5. Egy 2 egység oldalú $ABCD$ négyzet BC , illetve CD oldalának felezőpontja rendre E és F . A négyzet BD átlója az AE szakaszt H -ban, az AF szakaszt G -ben metszi. Számítsuk ki az $EFGH$ négyszög és az $ABCD$ négyzet területének arányát.

Ábrát készítünk a feladat szövege alapján



Mivel EF középvonal a BCD háromszögben, ezért EF és BD párhuzamosak, így az $EFGH$ négyszög trapéz.

1 pont

Az $ABCD$ négyzet BD átlójára $BD = 2 \cdot \sqrt{2}$. A BCD háromszög EF középvonala feleakkora, mint a vele párhuzamos oldal, ezért

$$EF = \frac{BD}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

1 pont

A négyzet AC átlója merőleges BD -re, így merőleges az azzal párhuzamos EF szakaszra is. Ebből következik, hogy ha az AC átló az EF szakaszt T -ben, a BD átlót O -ban metszi, akkor OT egyben az $EFGH$ trapéz magassága is.

Az EFC egyenlő szárú derékszögű háromszögben $CT = \frac{EF}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért az $EFGH$ trapéz magasságára

$$OT = OC - CT = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2 pont

Az AHG és AEF háromszögek hasonlóak egymáshoz, hiszen szögeik páronként megegyeznek.

1 pont

A két háromszög hasonlóságának λ aránya megegyezik a HG és EF oldalakhoz tartozó magasságuk arányával, azaz

$$\lambda = \frac{AO}{AT} = \frac{AO}{AO + OT} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{3}.$$

1 pont

Ebből következik, hogy

$$HG = \lambda \cdot EF = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2}.$$

1 pont

Az $EFGH$ trapéz területére

$$T_{EFGH} = \frac{HG + EF}{2} \cdot OT = \frac{\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{6}.$$

1 pont

Az $ABCD$ négyzet területe $T_{ABCD} = 4$,

1 pont

így az $EFGH$ trapéz és az $ABCD$ négyzet területének aránya	
$\frac{T_{EFGH}}{T_{ABCD}} = \frac{5}{24}.$	1 pont
Összesen:	10 pont

6. Határozzuk meg azokat a $(b; c)$ számpárokat, amelynek mindkét tagja 100-nál nem nagyobb pozitív egész szám, és amelyre az
- $$f(x) = x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x$$
- hozzárendelési szabállyal értelmezett függvénynek két (különböző) zérushelye van.

Az f függvény hozzárendelési szabályában x kiemelhető: $f(x) = x \cdot (x^2 + bx + c).$	1 pont																						
Vizsgáljuk az $x \cdot (x^2 + bx + c) = 0$ egyenletet. Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért az $x = 0$ a paraméterek értékétől függetlenül zérushelye az f függvénynek.	1 pont																						
Az f függvénynek pontosan akkor van két különböző zérushelye, ha az $x^2 + bx + c = 0$ egyenletnek pontosan egy (0-tól különböző) zérushelye van.	1 pont																						
Ennek feltétele, hogy az egyenlet diszkriminánsa 0 legyen,	1 pont																						
azaz $b^2 - 4c = 0$, így $b^2 = 4c$.	1 pont																						
Ez utóbbiból adódik, hogy c egy 100-nál nem nagyobb (pozitív) négyzetszám,	2 pont																						
azaz c lehetséges értékei: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.	1 pont																						
A feladat feltételeinek 10 számpár tesz eleget, ezeket az alábbi táblázatban foglaljuk össze.																							
<table><tr><td>b</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td><td>14</td><td>18</td><td>18</td><td>20</td></tr><tr><td>c</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td><td>25</td><td>36</td><td>49</td><td>64</td><td>81</td><td>100</td></tr></table>	b	2	4	6	8	10	12	14	18	18	20	c	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	2 pont
b	2	4	6	8	10	12	14	18	18	20													
c	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100													
Összesen:	10 pont																						

Megjegyzés: A fenti megoldások mindegyike esetén valóban két különböző zérushellyel rendelkezik az f függvény, hiszen az f -ben szereplő másodfokú tényezőnek a 0 egyetlen esetben sem zérushelye. A versenyző akkor is megkaphatja a maximális pontszámot, ha erre nem hivatkozik, illetve ha a kapott megoldások helyességét nem ellenőrzi.

12. évfolyam technikum

I. forduló

1. Anna és Bella mindketten a múlt hónapban helyezkedtek el egy új cégnél. A két lány első havi fizetésének aránya 10:9, míg kiadásai aránya 19:18 volt. Fizetése hány százalékát takarította meg Anna, ha az első havi megtakarításuk aránya 4:3?

(10 pont)

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$2 \cdot 4^x + 6^x = 16 \cdot 2^x + 8 \cdot 3^x$$

(10 pont)

3. Legyen $A = 240 \cdot 30^n$, ahol n pozitív egész számot jelöl.

- Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan pozitív egész szám, amelyet n helyére helyettesítve az A szám értéke négyzetszám.
- Melyek azok az n számok, amelyekre az A szám értéke egy másik egész szám harmadik hatványa?

(10 pont)

4. Az $ABCD$ téglalap két csúcsának koordinátái: $A(0; 0), D(-2; 2)$. A téglalap C csúcsa illeszkedik az $y = 2x$ egyenletű egyenesre. Határozzuk meg a téglalap hiányzó csúcsainak koordinátáit.

(10 pont)

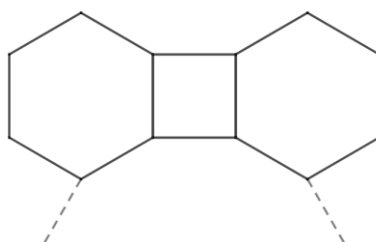
5. Kolos széfjét egy kilenc számjegyből álló számsor nyitja. A széfet nyitó kódot nem ismerjük, de azt tudjuk, hogy az alábbi feltételek közül mindkettőt teljesíti:

- a számjegyek közt az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyike egyszer fordul elő,
- a kódban az 1-es szám valahol az 5-ös számjegy előtti, a 9-es szám valahol az 5-ös számjegy utáni részben szerepel.

Hány próbálkozás szükséges ahhoz, hogy a széfet biztosan ki tudjuk nyitni?

(10 pont)

6. Szabályos sokszögekből többféleképp is alkothatunk az egész sík kitöltésére alkalmas parkettákat. Ezek közös tulajdonsága, hogy a szomszédos sokszögek teljes oldalukkal érintkeznek, továbbá köztük sem átfedés, sem hézag nem alakulhat ki. Ilyen síkkitöltés például a négyzetrács. Az alábbi parkettarészlet úgy keletkezett, hogy egy ismeretlen oldalszámú, 1 egység oldalhosszúságú szabályos sokszög oldalaihoz felváltva négyzeteket és szabályos hatszögeket illesztettünk. Lefedhető-e az ismeretlen oldalszámú sokszög egy 2 egység sugarú körrel?



(10 pont)

12. évfolyam technikum, I. forduló

Pontozási útmutató

1. Anna és Bella mindketten a múlt hónapban helyezkedtek el egy új cégnél. A két lány első havi fizetésének aránya 10:9, míg kiadásaik aránya 19:18 volt. Fizetése hány százalékát takarította meg Anna, ha az első havi megtakarításuk aránya 4:3?

Anna fizetését $10x$, Bella fizetését $9x$ alakban írhatjuk ($x > 0$).	1 pont
A kiadások aránya alapján Anna $19y$, Bella $18y$ összeget költött ($y > 0$).	1 pont
Anna megtakarítása ekkor $10x - 19y$,	1 pont
Bella megtakarítása pedig $9x - 18y$.	1 pont
A megtakarítások aránya alapján felírható a $\frac{10x - 19y}{9x - 18y} = \frac{4}{3}$ egyenlet.	2 pont
A nevezőkkel való szorzás, rendezés és összevonások után adódik, hogy $15y = 6x,$ $5y = 2x.$	1 pont
Ezt felhasználva kapjuk, hogy Anna megtakarítása $10x - 19y = 5 \cdot (2x) - 19y = 5 \cdot (5y) - 19y = 6y,$	1 pont
megtakarításának és fizetésének aránya pedig $\frac{6y}{10x} = \frac{6y}{25y} = \frac{6}{25},$	1 pont
azaz Anna fizetésének 24%-át takarította meg.	1 pont
Összesen:	10 pont

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$2 \cdot 4^x + 6^x = 16 \cdot 2^x + 8 \cdot 3^x$$

Az egyenlet bal oldalán is 2-es, illetve 3-as alapú hatványokat alakítunk ki: $2 \cdot 2^{2x} + 2^x \cdot 3^x = 16 \cdot 2^x + 8 \cdot 3^x.$	2 pont
Az egyenlet 0-ra redukálása után kiemeléseket végzünk: $2 \cdot 2^x \cdot (2^x - 8) + 3^x \cdot (2^x - 8) = 0.$	2 pont
A bal oldalt szorzattá alakítva kapjuk, hogy $(2^x - 8) \cdot (2 \cdot 2^x + 3^x) = 0.$	1 pont
Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, ezért $2^x = 8,$ vagy $2 \cdot 2^x + 3^x = 0.$	2 pont

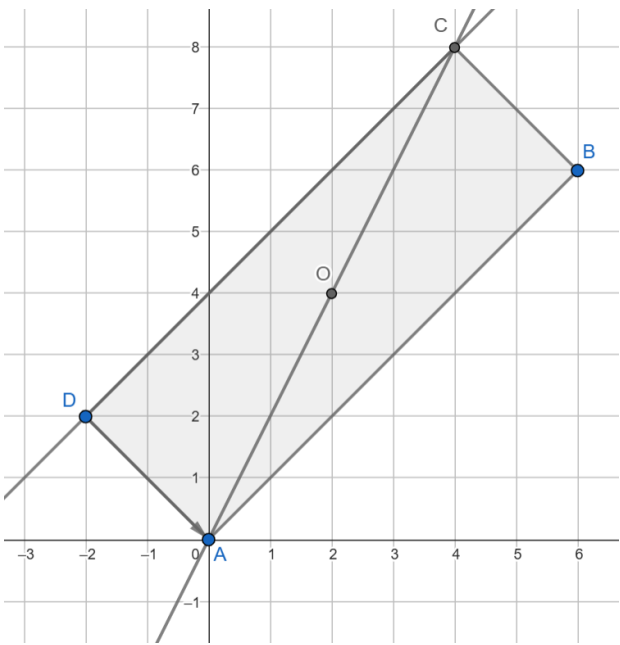
Az utóbbi egyenlet bal oldalán két pozitív értékű kifejezés összege áll, ezért ennek az egyenletnek nincs megoldása.	1 pont
Ha $2^x = 8$, akkor $x = 3$.	1 pont
Ellenőrzés mutatja, hogy a kapott eredmény valóban megoldása az egyenletnek.	1 pont
Összesen:	10 pont

3. Legyen $A = 240 \cdot 30^n$, ahol n pozitív egész számot jelöl.
- a) Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan pozitív egész szám, amelyet n helyére helyettesítve az A szám értéke négyzetszám.
- b) Melyek azok az n számok, amelyekre az A szám értéke egy másik egész szám harmadik hatványa?

a) Mivel $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ és $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, ezért az A szám prímtényezős felbontása $A = 2^{n+4} \cdot 3^{n+1} \cdot 5^{n+1}.$	2 pont
Az $n + 1$ és az $n + 4$ értéke biztosan különböző paritású, ezért az A számban a 2 és a 3 (valamint vele együtt az 5) kitevője közül az egyik páros, a másik páratlan.	2 pont
A négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden prímosztó kitevője páros,	1 pont
ezért az A szám valóban nem lehet négyzetszám.	1 pont
b) Ha az A szám egy másik egész szám harmadik hatványa, akkor A prímtényezős felbontásában minden prímosztó kitevője 3-mal osztható.	1 pont
Mivel $(n + 4) - (n + 1) = 3$, ezért elegendő azt vizsgálni, hogy $n + 1$ mely n -ek esetén osztható 3-mal (ekkor természetesen $n + 4$ is ilyen tulajdonságú).	1 pont
Az $n + 1$ értéke pontosan akkor osztható 3-mal, ha n 3-as maradéka 2, ezek azok az n értékek, amely esetén az A értéke egy másik egész szám harmadik hatványa.	2 pont
Összesen:	10 pont

4. Az $ABCD$ téglalap két csúcsának koordinátái: $A(0; 0), D(-2; 2)$. A téglalap C csúcsa illeszkedik az $y = 2x$ egyenletű egyenesre. Határozzuk meg a téglalap hiányzó csúcsainak koordinátáit.

Első megoldás

A $\overrightarrow{DA}$ vektor koordinátái: $\overrightarrow{DA}(2; -2)$. 	1 pont
A DC egyenesnek a fenti vektor normálvektora, ezért a DC egyenes egyenlete: $2x - 2y = -8,$ $x - y = -4.$	2 pont
A téglalap C csúcsa illeszkedik a DC egyenesre, valamint az $y = 2x$ egyenletű egyenesre is, ezért koordinátáit az $\begin{cases} x - y = -4 \\ y = 2x \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása adja.	1 pont
Az első egyenletbe $y = 2x$-et helyettesítve $x - 2x = -4$,	1 pont
amiből $x = 4$,	1 pont
illetve $y = 8$.	1 pont
A C pont koordinátái: $C(4; 8)$.	1 pont
Az AC átló O felezőpontja: $O(2; 4)$.	1 pont*
Az O pont az BD szakasz felezőpontja is, ezért ha $B(b_1; b_2)$, akkor $\frac{b_1 + (-2)}{2} = 2, \text{ és } \frac{b_2 + 2}{2} = 4,$ amiből $b_1 = 6, b_2 = 6$, és $B(6; 6)$.	1 pont*
Összesen:	10 pont

Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat a versenyző akkor is megkaphatja, ha a B csúcs koordinátáit közvetlenül így számolja: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$, amiből $B(6; 6)$ adódik.

Második megoldás

Jelölje a téglalap B csúcsának koordinátáit $B(b_1; b_2)$. Ekkor $\overrightarrow{AB}(b_1; b_2)$ és $\overrightarrow{AD}(-2; 2)$.	1 pont
A fenti vektorok merőlegesek egymásra, ezért skaláris szorzatuk 0, amiből következik, hogy $-2b_1 + 2b_2 = 0,$ $b_1 = b_2.$	2 pont
Mivel a C csúcs illeszkedik az $y = 2x$ egyenletű egyenesre, ezért ez az egyenes egyben a téglalap átlóegyenesre is. Ebből következik, hogy a BD szakasz felezőpontja is illeszkedik az egyenesre.	1 pont
A BD szakasz O felezőpontjára: $O\left(\frac{b_1-2}{2}; \frac{b_2+2}{2}\right)$, és így $\frac{b_2+2}{2} = 2 \cdot \frac{b_1-2}{2},$ $b_2 = 2b_1 - 6.$	2 pont
Mivel $b_1 = b_2$ is teljesül, ezért $b_2 = 2b_2 - 6,$ amiből $b_2 = 6$,	1 pont
és $B(6; 6)$.	1 pont
Az átlók O felezőpontja: $O(2; 4)$.	1 pont
Az O pont az AC szakasz felezőpontja is, ezért ha $C(c_1; c_2)$, akkor $\frac{c_1+0}{2} = 2, \text{ és } \frac{c_2+0}{2} = 4,$ amiből $c_1 = 4$, $c_2 = 8$, és $C(4; 8)$.	1 pont
Összesen:	10 pont

5. *Kolos széjfét egy kilenc számjegyből álló számsor nyitja. A széfet nyitó kódot nem ismerjük, de azt tudjuk, hogy az alábbi feltételek közül mindkettőt teljesíti:*

- *a számjegyek közt az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyike egyszer fordul elő,*
- *a kódban az 1-es szám valahol az 5-ös számjegy előtti, a 9-es szám valahol az 5-ös számjegy utáni részben szerepel.*

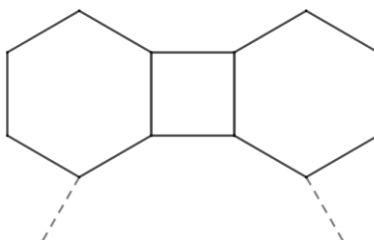
Hány próbálkozás szükséges ahhoz, hogy a széfet biztosan ki tudjuk nyitni?

A széfet nyitó kódokat az 5-ös szám helye szerint számoljuk össze.	1 pont
Az 5-ös szám nem állhat az első, és a kilencedik helyen.	1 pont
Ha az 5 a második helyen áll, akkor az 1-es az 1. helyen szerepel, a 9-es helyét pedig 7-féleképp választhatjuk (3. és 9. hely között bárhol lehet).	1 pont
A maradék számjegyeket $6! = 720$ -féleképp rakhatjuk le, ezért az esetek száma $1 \cdot 7 \cdot 720 = 5040$.	2 pont*
Ha az 5 a harmadik helyen áll, akkor az 1-es helyét 2-féleképp, a 9-es helyét 6-féleképp, a többi számjegy helyét 720-féleképp választhatjuk, az esetek száma tehát $2 \cdot 6 \cdot 720 = 8640$.	1 pont*

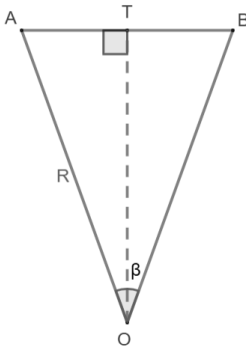
Hasonló gondolatmenet mutatja, hogy ha az 5-ös szám a k -adik helyen áll ($2 \leq k \leq 8$), akkor az 1-es helyét $(k - 1)$ -féleképp, a 9-es szám helyét pedig $(9 - k)$ -féleképp választhatjuk meg, ezért ezeket a számjegyeket összesen $(k - 1) \cdot (9 - k)$ -féleképp rakhatjuk be a kódba. A maradék számokat minden esetben 720-féleképp rakhatjuk sorba.	2 pont
A lehetséges kódok száma ezért $720 \cdot (1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1) = 60480,$ ennyi próbálkozás szükséges Kolosnak ahhoz, hogy a széfet biztosan kinyissa.	2 pont
Összesen:	10 pont

*Megjegyzés: Ha a versenyző számításai során nem veszi figyelembe az 1-es, 5-ös, 9-es számok sorrendjét, akkor a *-gal megjelölt pontokat nem kaphatja meg.*

6. Szabályos sokszögekből többféleképp is alkothatunk az egész sík kitöltésére alkalmas parkettákat. Ezek közös tulajdonsága, hogy a szomszédos sokszögek teljes oldalukkal érintkeznek, továbbá köztük sem átfedés, sem hézag nem alakulhat ki. Ilyen síkkitöltés például a négyzetrács. Az alábbi parkettarészlet úgy keletkezett, hogy egy ismeretlen oldalszámú, 1 egység oldalhosszúságú szabályos sokszög oldalaihoz felváltva négyzeteket és szabályos hatszögeket illesztettünk. Lefedhető-e az ismeretlen oldalszámú sokszög egy 2 egység sugarú körrel?



Jelölje az ismeretlen oldalszámú szabályos sokszög belső szögét α . A parketta csúcspontjaiban ekkor $\alpha + 120^\circ + 90^\circ = 360^\circ,$ amiből $\alpha = 150^\circ$.	2 pont
Ha a szabályos sokszög oldalainak számát n jelöli, akkor egy belső szögére $\frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n} = 150^\circ,$ aminek megoldása $n = 12$. Az ismeretlen oldalszámú szabályos sokszögnek 12 oldala van.	2 pont
A szabályos sokszöget lefedő körök közül a sokszög köré írható körnek a legkisebb a sugara, ezért kiszámoljuk a 12-szög köré írható kör sugarát.	1 pont
Jelöljük O -val a parkettában szereplő szabályos sokszög köré írható kör középpontját, A -val és B -vel egyik oldalának két végpontját, T -vel az AB szakasz felezőpontját. Ekkor az ATO háromszög derékszögű, és AO a sokszög köré írható kör sugara, melyet az ábrán R jelöl.	1 pont

	
Ha az $AOB\angle$ -et β jelöli, akkor $\beta = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.	1 pont
Az AOT derékszögű háromszögben $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{AT}{R},$ amiből $R = \frac{AT}{\sin 15^\circ} = \frac{0,5}{\sin 15^\circ} \approx 1,9319.$	2 pont*
Mivel $R < 2$, ezért a szabályos 12-szög lefedhető egy 2 egység sugarú körrel.	1 pont
Összesen: 10 pont	

Megjegyzés: A *-gal jelölt részt természetesen közelítő értékek használata nélkül is megkaphatjuk. Addíciós összefüggések segítségével kapjuk, hogy

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

amiből

$$R = \frac{2}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$