

11. évfolyam gimnázium

I. forduló

1. Egy városi sakkbajnokságon bármely két résztvevő egy partit játszik egymással. A versenyen elindult Botond is, aki azonban 6 lejátszott parti után feladta a küzdelmet. Csaba szintén részt vett a bajnokságon, de ő már a második lejátszott partija után visszalépett a további versenyzéstől. A bajnokságon így összesen 73 sakkpartit bonyolítottak le a játékosok között.

- a) Megmérkőzött-e egymással Botond és Csaba?
b) Botondot és Csabát nem számítva, összesen hány résztvevője volt a bajnokságnak?

(10 pont)

2. Béla elfelejtette Géza 8-jegyű telefonszámát, mindössze két számjegyre emlékszik biztosan: az első 7-es, a negyedik számjegy 9-es. Arra is emlékezett, hogy a telefonszám bármely négy szomszédos számjegyének összege ugyanannyi, valamint a 8-jegyű telefonszám osztható 3-mal.

- a) Lehet-e Géza telefonszáma 9-cel osztható?
b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha Béla egy a rendelkezésére álló feltételeknek megfelelő telefonszámot véletlenszerűen tárcsáz, akkor fel tudja hívni Gézát?

(10 pont)

3. Az $ABCD$ négyzet CD oldalát a $DAC\angle$ szögfelezője az E pontban, a $DBA\angle$ szögfelezője az AC átlót az F pontban metszi. Az ABF háromszög területe 25 cm^2 . Mekkora az $ABCD$ négyzet területe?

(10 pont)

4. Az f függvényt a $[-4; 1]$ intervallumon az

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|} \cdot |x + 1|$$

hozzárendelési szabállyal értelmezzük. Adjuk meg az f függvény értékkészletét.

(10 pont)

5. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\sqrt{x^3 + x^2} + \sqrt{x^3 - x^2} = \sqrt{2} \cdot x$$

(10 pont)

6. Hány olyan 2025-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amelyet n helyére helyettesítve az

$$A = n^5 - 16n$$

kifejezés értéke osztható 45-tel?

(10 pont)

11. évfolyam gimnázium, I. forduló

Pontozási útmutató

1. Egy városi sakkbajnokságon bármely két résztvevő egy partit játszik egymással. A versenyen elindult Botond is, aki azonban 6 lejátszott parti után feladta a küzdelmet. Csaba szintén részt vett a bajnokságon, de ő már a második lejátszott partija után visszalépett a további versenyzéstől. A bajnokságon így összesen 73 sakkpartit bonyolítottak le a játékosok között. a) Megmérkőzött-e egymással Botond és Csaba? b) Botondot és Csabát nem számítva, összesen hány résztvevője volt a bajnokságnak?
--

a) Ha Botond és Csaba nem játszott még egymással, akkor a többiek összesen $73 - 6 - 2 = 65$ partit játszottak egymással.	1 pont
Ha Botondon és Csabán kívül még n játékos vett részt a bajnokságon, akkor ők egymást közt összesen $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ partit játszottak,	1 pont
ezért $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 65.$	1 pont
A fenti egyenletből $n^2 - n - 130 = 0,$ aminek nincs pozitív egész megoldása,	1 pont
ezért Botond és Csaba biztosan játszott egymással.	1 pont
b) Az a) feladat eredménye alapján tudjuk, hogy Botond és Csaba játszott egymással. Ekkor a többiek összesen $73 - 6 - 2 + 1 = 66$ mérkőzést játszottak egymással,	1 pont
így $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 66,$	1 pont
amiből $n^2 - n - 132 = 0.$	1 pont
A kapott másodfokú egyenlet megoldásai $n = 12$ és $n = -11$.	1 pont
Mivel a játékosok száma pozitív egész szám, ezért a bajnokságon Botondot és Csabát nem számítva 12 játékos vett részt.	1 pont
Összesen:	10 pont

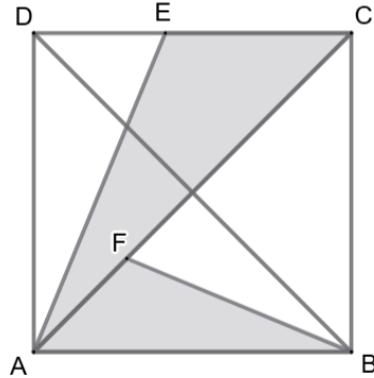
2. Béla elfelejtette Géza 8-jegyű telefonszámát, mindössze két számjegyre emlékszik biztosan: az első 7-es, a negyedik számjegy 9-es. Arra is emlékezett, hogy a telefonszám bármely négy szomszédos számjegyének összege ugyanannyi, valamint a 8-jegyű telefonszám osztható 3-mal.
- a) Lehet-e Géza telefonszáma 9-cel osztható?
- a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha Béla egy a rendelkezésére álló feltételeknek megfelelő telefonszámot véletlenszerűen tárcsáz, akkor fel tudja hívni Gézát?

a)	Géza telefonszámát $\overline{7ab9cdef}$ alakban keressük, ahol az ismeretlenek mindegyike egy-egy számjegyet jelöl. Mivel bármely négy szomszédos számjegy összege ugyanannyi, ezért $7 + a + b + 9 = a + b + 9 + c,$ amiből $c = 7$ adódik.	1 pont														
	Ismét a számjegyek összegének egyenlőségét használva $7 + a + b + 9 = b + 9 + 7 + d,$ amiből következik, hogy $d = a$.	1 pont														
	Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy $e = b$ és $f = 9$, így Géza telefonszáma $\overline{7ab97ab9}$ alakú.	1 pont														
	A fenti 8-jegyű szám számjegyeinek összege $32 + 2(a + b)$.	1 pont														
	A telefonszám pontosan akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel, így például $a = 1$, $b = 1$ esetén a 71197119 osztható 9-cel, így Géza telefonszáma lehet 9-cel osztható.	2 pont*														
b)	A 3-mal való oszthatóság miatt $32 + 2(a + b)$ osztható 3-mal. Az $a + b$ lehetséges értékei: 2, 5, 8, 11, 14 17.	1 pont														
	Összefoglaljuk, hogy az egyes összegek hányféleképp kaphatók meg. <table border="1"><tr><td>$a + b$ értéke</td><td>2</td><td>5</td><td>8</td><td>11</td><td>14</td><td>17</td></tr><tr><td>Lehetőségek száma</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>8</td><td>5</td><td>2</td></tr></table>	$a + b$ értéke	2	5	8	11	14	17	Lehetőségek száma	3	6	9	8	5	2	
$a + b$ értéke	2	5	8	11	14	17										
Lehetőségek száma	3	6	9	8	5	2										
	Ezek alapján összesen 33 darab 8-jegyű szám tesz eleget a feltételeknek.	2 pont														
	Annak a valószínűsége tehát, hogy Béla első próbálkozásra fel tudja hívni Gézát $\frac{1}{33}$.	1 pont														
	Összesen:	10 pont														

Megjegyzés: Ha a versenyző előzetes számítások nélkül ír fel egy 9-cel osztható, a feltételeknek megfelelő számot, akkor csak a *-gal jelölt pontokat kapja meg.

3. Az $ABCD$ négyzet CD oldalát a $DAC\angle$ szögfelezője az E pontban, a $DBA\angle$ szögfelezője az AC átlót az F pontban metszi. Az ABF háromszög területe 25 cm^2 . Mekkora az $ABCD$ négyzet területe?

Ábrát készítünk a feladat szövege alapján.



Az ABF és a CAE háromszögekben

$$\begin{aligned}FAB\angle &= ECA\angle = 45^\circ, \\FBA\angle &= EAC\angle = 22,5^\circ,\end{aligned}$$

1 pont

ezért a két háromszög szögei páronként megegyeznek, ebből adódik, hogy az FAB és az ECA háromszögek hasonlóak.

1 pont

Ha a két háromszög hasonlóságának arányát λ jelöli, akkor

$$\lambda = \frac{AB}{AC}.$$

Ha az $ABCD$ négyzet oldalát a jelöli, akkor $AC = a \cdot \sqrt{2}$, ezért

$$\lambda = \frac{a}{a \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1 pont

Hasonló síkidomok területének aránya megegyezik a hasonlóság arányának négyzetével, ezért

$$\frac{T_{ABF}}{T_{CAE}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

2 pont

Felhasználva, hogy az ABF háromszög területe 25 cm^2 , azt kapjuk, hogy

$$T_{CAE} = 2 \cdot T_{ABF} = 50\text{ cm}^2.$$

1 pont

Az ACD háromszögben AE szögfelező, így a szögfelezőtétel alapján

$$\frac{DE}{EC} = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{a \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1 pont

Az EAD és CAE háromszögek DE és EC oldalához ugyanakkora magasság tartozik (épp a négyzet a oldala), ezért a két háromszög területe megegyezik a DE és EC oldalak arányával, azaz

$$\frac{T_{EAD}}{T_{CAE}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

1 pont

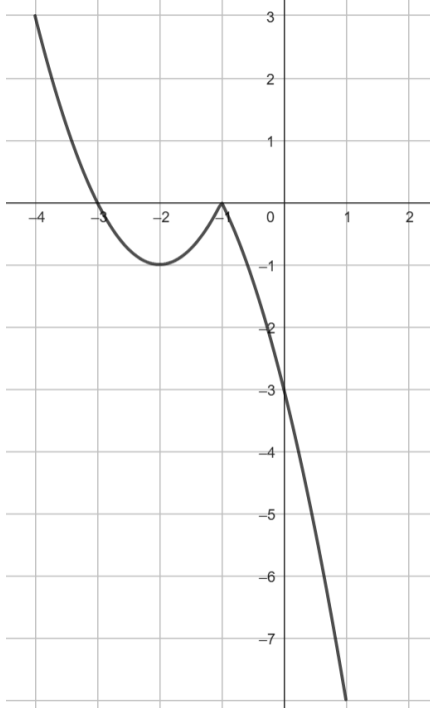
amiből következik, hogy $T_{EAD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot T_{CAE} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 50 = 25 \cdot \sqrt{2}\text{ cm}^2$.

1 pont

Az $ABCD$ négyzet területe	
$T_{ABCD} = 2 \cdot (T_{EAD} + T_{CAE}) = 2 \cdot (25 \cdot \sqrt{2} + 50) = 100 + 50\sqrt{2} \text{ cm}^2.$	1 pont
Összesen:	10 pont

4. Az f függvényt a $[-4; 1]$ intervallumon az $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{ x - 2 } \cdot x + 1 $ hozzárendelési szabállyal értelmezzük. Adjuk meg az f függvény értékkészletét.	
---	--

Az értelmezési tartományon $x - 2 < 0$, ezért $ x - 2 = 2 - x$.	1 pont
Az $x + 1$ felbontása: $ x + 1 = \begin{cases} -x - 1, & \text{ha } x \in [-4; -1[, \\ x + 1, & \text{ha } x \in [-1; 1]. \end{cases}$	1 pont
Ezek alapján az f függvény hozzárendelési szabálya: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{2 - x} \cdot (-x - 1), & \text{ha } x \in [-4; -1[, \\ \frac{x^2 + x - 6}{2 - x} \cdot (x + 1), & \text{ha } x \in [-1; 1]. \end{cases}$	1 pont
Az $x^2 + x - 6$ másodfokú kifejezés gyökei 2 és -3 , ezért a gyöktényezős formula alapján $x^2 + x - 6 = (x - 2) \cdot (x + 3)$.	1 pont
A szorzatalak behelyettesítése után az f hozzárendelési szabályában egyszerűsíthetünk, így azt kapjuk, hogy $f(x) = \begin{cases} -(x + 3) \cdot (-x - 1), & \text{ha } x \in [-4; -1[, \\ -(x + 3) \cdot (x + 1), & \text{ha } x \in [-1; 1], \end{cases}$	1 pont
azaz $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, & \text{ha } x \in [-4; -1[, \\ -x^2 - 4x - 3, & \text{ha } x \in [-1; 1]. \end{cases}$	1 pont
A hozzárendelési szabályban megjelenő másodfokú kifejezéseket teljes négyzetté alakítjuk: $f(x) = \begin{cases} (x + 2)^2 - 1, & \text{ha } x \in [-4; -1[, \\ -(x + 2)^2 + 1, & \text{ha } x \in [-1; 1]. \end{cases}$	1 pont

Az f függvény grafikonja: 	2 pont*
Az ábra alapján az f függvény értékkészlete: $[-8; 3]$.	1 pont*
Összesen:	10 pont

*Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat akkor is megkapja a versenyző, ha a függvény grafikonját nem ábrázolja, hanem más módszerekkel (pl. szélsőérték megkeresése, monotonitás vizsgálata) állapítja meg helyesen az értékkészletet.*

5. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán. $\sqrt{x^3 + x^2} + \sqrt{x^3 - x^2} = \sqrt{2} \cdot x$

Vizsgáljuk meg az egyenlet értelmezési tartományát. A négyzetgyök alatti kifejezések szorzattá alakíthatók: $x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$ és $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$.	1 pont
A négyzetgyök alatt nemnegatív számok állnak, ezért $x^2(x + 1) \geq 0$, amiből $x \geq -1$. Az $x^2(x - 1) \geq 0$ egyenlőtlenség megoldása: $x = 0$ vagy $x \geq 1$. Az egyenlet értelmezési tartománya: $x = 0$ vagy $x \geq 1$.	2 pont
Az $x = 0$ megoldása az egyenletnek.	1 pont
Ha $x \geq 1$, akkor tényezőnkénti gyökvonás után, a $\sqrt{x^2} = x$ összefüggés felhasználása után, azt kapjuk, hogy $ x \cdot \sqrt{x + 1} + x \cdot \sqrt{x - 1} = \sqrt{2} \cdot x.$	1 pont
Az $x \geq 1$ feltétel mellett $x = x$, továbbá mindkét oldalt eloszthatjuk a 0-tól biztosan különböző x-szel, így adódik, hogy $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} = \sqrt{2}.$	2 pont

Mindkét oldalból a $\sqrt{x-1}$ kifejezést kivonva, majd négyzetre emelve $x + 1 = 2 - 2 \cdot \sqrt{2}\sqrt{x-1} + x - 1,$ amiből rendezést követően $2 \cdot \sqrt{2}\sqrt{x-1} = 0.$	1 pont*
A kapott egyenlet megoldása $x = 1$.	1 pont*
Az egyenletnek összesen két megoldása van, az $x = 0$ és az $x = 1$. A kapott gyökök mindegyike valóban megoldása az egyenletnek, amit az ellenőrzés is mutat.	1 pont
Összesen:	10 pont

Megjegyzések:

1. A^* -gal jelölt pontokat akkor is kapja meg a versenyző, ha megállapítja, hogy $x > 1$ esetén $\sqrt{x+1} > \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, és így a $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{2}$ egyenlet bal oldalán álló kifejezésre $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} > \sqrt{2} + 0 = \sqrt{2}$, ezért csak $x = 1$ lehetséges.
2. A kapott $2 \cdot \sqrt{(x+1) \cdot (x-1)} = 2 - 2x$ egyenlet négyzetre emelés segítségével is megoldható, hiszen ekkor azt kapjuk, hogy $4(x^2 - 1) = 4 - 8x + 4x^2$, amiből rendezés és összevonások után $8x = 8$, azaz $x = 1$.

6. Hány olyan 2025-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amelyet n helyére helyettesítve az $A = n^5 - 16n$ kifejezés értéke osztható 45-tel?
--

Az A kifejezést szorzattá alakítjuk: $A = n(n^4 - 16) = n(n^2 - 4)(n^2 + 4) =$	1 pont
$= n(n - 2)(n + 2)(n^2 + 4).$	1 pont
A 45-tel való oszthatóság feltétele az 5-tel és a 9-cel való oszthatóság egyidejű teljesülése. Előbb az A kifejezés értékének 5-tel való oszthatóságát vizsgáljuk az n szám 5-ös maradéka segítségével. Ha $n = 5k$, vagy $n = 5k + 2$, vagy $n = 5k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}$), akkor rendre az n , $n - 2$, $n + 2$ értéke osztható 5-tel, így A is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.	1 pont
Ha $n = 5k + 1$, akkor $n^2 + 4 = 25k^2 + 10k + 5$, ami osztható 5-tel. Ha $n = 5k + 4$, akkor $n^2 + 4 = 25k^2 + 40k + 20$, ami szintén osztható 5-tel. Az A kifejezés értéke minden pozitív egész n szám esetén osztható 5-tel.	2 pont
Vizsgáljuk az A kifejezés értékének 9-cel való oszthatóságát az n szám 9-es maradéka segítségével. Ha $n = 9k$, $n = 9k + 2$, $n = 9k - 2$ ($k \in \mathbb{Z}$), akkor rendre az n , $n - 2$, $n + 2$ értéke osztható 9-cel, így A is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.	2 pont

Ha $n = 9k \pm 1$, akkor $n^2 + 4 = 81k^2 \pm 18k + 5$, ami nem osztható 9-cel. Ha $n = 9k \pm 3$, akkor $n^2 + 4 = 81k^2 \pm 54k + 13$, ami nem osztható 9-cel. Ha $n = 9k \pm 4$, akkor $n^2 + 4 = 81k^2 \pm 72k + 20$, ami szintén nem osztható 9-cel. Az A kifejezés értéke pontosan akkor osztható 9-cel, ha az n szám 9-cel osztva 0, 2 vagy 7 maradékot ad.	2 pont*
Az első 2025 pozitív egész szám közt mindegyik maradékosztályba $2025:9 = 225$ szám tartozik, ezért összesen 675 szám tesz eleget a feladat feltételeinek.	1 pont
Összesen:	10 pont

Megjegyzések:

1. Ha a versenyző az 5-tel való oszthatóságot az A kifejezés értékének utolsó számjegye alapján vizsgálja, akkor kapja meg a megfelelő pontokat.
2. Ha a versenyző a 9-es maradékokat is végigszámolva kapja meg a három maradékosztályt, akkor is kapja meg a *-gal jelölt pontokat.

12. évfolyam gimnázium

I. forduló

1. Az $A = \{1; 2; 3; \dots; 400\}$ halmaz elemeit párokba rendezzük úgy, hogy a halmaz minden eleme pontosan egy párnak legyen tagja. Az így kialakuló párok mindegyikére képezzük a párt alkotó két szám összegét.
- a) Bizonyítsuk be, hogy nem lehet a kapott összegek mindegyike 3-mal osztható.
- b) Lehetséges-e, hogy a kapott összegek mindegyike osztható 5-tel?

(10 pont)

2. Egy számtani sorozat első tagja 5, n -edik tagja 12, k -adik tagja 13 ($k > n$).
- a) Bizonyítsuk be, hogy az n szám 7-tel osztva 1 maradékot ad.
- b) Számítsuk ki a k szám 8-cal adott osztási maradékát.

(10 pont)

3. Az f függvényt az

$$f(x) = \sqrt{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

hozzárendelési szabállyal értelmezzük.

- a) Adjuk meg az f függvény értelmezési tartományát.
- b) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját értelmezési tartományának azon a részhalmazán, amelyek 8-nál nem nagyobb számokból állnak.

(10 pont)

4. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left(\frac{1}{x} - 2\right)^2 + 9 \cdot \frac{x^2}{1 - 4x + 4x^2} = 10$$

(10 pont)

5. Az $ABCD$ téglalap AB oldalának A -hoz, BC oldalának B -hez, CD oldalának C -hez, valamint DA oldalának D -hez legközelebb eső negyedelő pontja rendre P , Q , R , valamint S . A téglalap egy belső T pontjára teljesül, hogy a $PTQB$ négyszög területe harmadrésze az $ABCD$ téglalap területének. Mekkora az $STRD$ négyszög és az $ABCD$ téglalap területének aránya?

(10 pont)

6. Egy négyzet csúcsainak koordinátái: $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(2; 2)$ és $(0; 2)$. Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes felezi a négyzet területét, továbbá az $y = \frac{x^2}{2}$ egyenletű parabolát két olyan pontban metszi, amelyek első koordinátáinak különbsége $\sqrt{13}$. Határozzuk meg az a és b paraméter értékét.

(10 pont)

12. évfolyam gimnázium, I. forduló

Pontozási útmutató

1.	<i>Az $A = \{1; 2; 3; \dots; 400\}$ halmaz elemeit párokba rendezzük úgy, hogy a halmaz minden eleme pontosan egy párnak legyen tagja. Az így kialakuló párok mindegyikére képezzük a párt alkotó két szám összegét.</i>
a)	<i>Bizonyítsuk be, hogy nem lehet a kapott összegek mindegyike 3-mal osztható.</i>
b)	<i>Lehetséges-e, hogy a kapott összegek mindegyike osztható 5-tel?</i>

a)	Ha a kialakuló párok mindegyikében 3-mal osztható lenne a számok összege, akkor az első 400 pozitív egész összege is 3-mal osztható lenne.	1 pont
	Az első 400 darab pozitív egész szám összege ugyanakkor $1 + 2 + \dots + 400 = \frac{401 \cdot 400}{2} = 401 \cdot 200 = 80200,$	2 pont
	ami nem osztható 3-mal,	1 pont
	így nem lehet minden pár összege 3-mal osztható.	1 pont
b)	A kapott összegek mindegyike lehet 5-tel osztható.	1 pont
	Az egész számok 5-ös maradéka 0, 1, 2, 3 vagy 4 lehet. Osszuk az első 400 darab pozitív egész számot a fenti 5 csoportra. Ekkor minden csoportba 80 darab szám kerül.	2pont
	A 80 darab 5-tel osztható számot tetszőleges módon párba állíthatjuk, minden párban 5-tel osztható lesz a számok összege. Az 5-tel osztva 1 maradékot adó számokat a 4 maradékot adó számokkal tetszőleges módon párba állítva 5-tel osztható lesz a párok összege. Ehhez hasonlóan az 5-tel osztva 2 maradékot adó számokat a 3 maradékot adó számokkal tetszőleges módon párba állítva 5-tel osztható lesz a párok összege. Ezzel beláttuk, hogy a párba állítás megvalósítható.	2pont
Összesen:		10 pont

Megjegyzések:

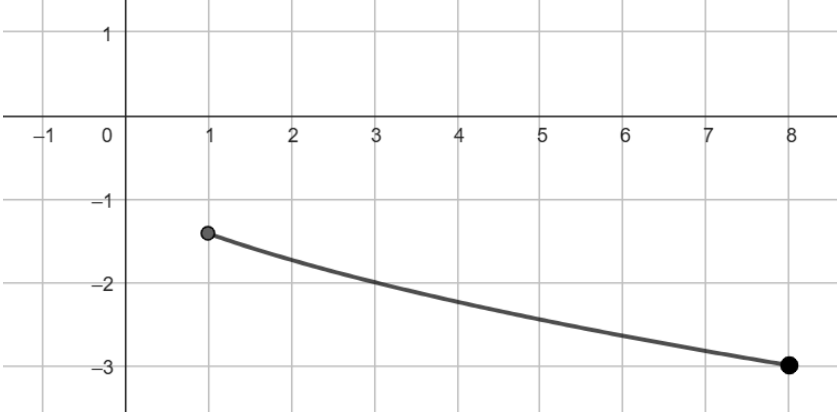
- A versenyző az a) részre maximális pontot kaphat, ha arra hivatkozik, hogy a párba állítás során 3-mal osztható számnak csak 3-mal osztható szám lehet a párja, de az első 400 darab pozitív egész szám között páratlan sok 3-mal osztható szám van, ezért a párba állítás nem valósítható meg.*
- A b) részre bármilyen jó példa megadása esetén maximális pontszám adható.*

2. Egy számtani sorozat első tagja 5, n -edik tagja 12, k -edik tagja 13 ($k > n$).
- a) Bizonyítsuk be, hogy az n szám 7-tel osztva 1 maradékot ad.
- b) Számítsuk ki a k szám 8-cal adott osztási maradékát.

a) Az $\{a_n\}$ számtani sorozat tagjaira: $a_1 = 5$, $a_n = 12$, $a_k = 13$. Ha a sorozat differenciáját d jelöli, akkor (1) $5 + (n - 1)d = 12$, (2) $5 + (k - 1)d = 13$.	1 pont
A (2) és (1) egyenlőségek megfelelő oldalainak különbsége: $(k - 1)d - (n - 1)d = 1$, $(k - n)d = 1$.	2 pont
Mivel a sorozat differenciája 0-tól különböző, ezért $d = \frac{1}{k - n},$ amit az (1) összefüggésbe helyettesítve $5 + (n - 1) \cdot \frac{1}{k - n} = 12,$ amiből (3) $n - 1 = 7(k - n)$.	2 pont
Rendezés után adódik, hogy $n = 7(k - n) + 1$, amiből következik, hogy az n szám 7-tel osztva 1 maradékot ad.	2 pont
b) A (3) összefüggésből rendezés után azt kapjuk, hogy $8n - 1 = 7k$, majd mindkét oldalból $8k$ -t elvéve $8(n - k) - 1 = -k$, végül -1 -gyel szorozva $k = 8(k - n) + 1$.	2 pont
A k szám 8-cal osztva 1 maradékot ad.	1 pont
Összesen:	10 pont

3. Az f függvényt az $f(x) = \sqrt{x - 1} - \frac{2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$ hozzárendelési szabállyal értelmezzük.
- a) Adjuk meg az f függvény értelmezési tartományát.
- b) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját értelmezési tartományának azon a részhalmazán, amelyek 8-nál nem nagyobb számokból állnak.

a) A négyzetgyök alatt nemnegatív számok állnak, ezért $x + 1 \geq 0$ és $x - 1 \geq 0$, amelyekből $x \geq 1$.	1 pont
A tört nevezőjében nem állhat 0, ezért $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1} \neq 0$, ami minden valós x -re teljesül,	1 pont
ezért a függvény értelmezési tartománya: $[1; \infty[$.	1 pont

b) Az f hozzárendelési szabályában szereplő tört nevezőjének gyöktelenítése után kapjuk, hogy $\frac{2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(x+1) - (x-1)} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}.$	3 pont
Ezt felhasználva $f(x) = \sqrt{x-1} - (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) = -\sqrt{x+1}.$	1 pont
Az f függvény grafikonja a megfelelő halmazon: 	3 pont*
Összesen:	10 pont

*Megjegyzés: Ha a versenyző a függvény ábrázolásánál az értelmezési tartományt figyelmen kívül hagyja, akkor a *-gal jelölt pontokból legfeljebb 1 pontot kaphat.*

4. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán. $\left(\frac{1}{x} - 2\right)^2 + 9 \cdot \frac{x^2}{1 - 4x + 4x^2} = 10$
--

Mivel $1 - 4x + 4x^2 = (1 - 2x)^2$,	1 pont
ezért $x \neq 0$ és $x \neq \frac{1}{2}$.	1 pont
Az egyenlet a következő alakra hozható: $\left(\frac{1-2x}{x}\right)^2 + 9 \cdot \left(\frac{x}{1-2x}\right)^2 = 10.$	1 pont
Vezessük be a $y = \left(\frac{1-2x}{x}\right)^2$ helyettesítést, ekkor $y + 9 \cdot \frac{1}{y} = 10,$ amiből $y^2 - 10y + 9 = 0.$	2 pont
A kapott egyenlet megoldásai: $y = 1$ és $y = 9$.	1 pont
Az $\frac{1-2x}{x}$ kifejezés lehetséges értékei: 1, -1, 3, -3.	1 pont*

Ha $\frac{1-2x}{x} = 1$, akkor $x = \frac{1}{3}$. Ha $\frac{1-2x}{x} = -1$, akkor $x = 1$. Ha $\frac{1-2x}{x} = 3$, akkor $x = \frac{1}{5}$. Ha $\frac{1-2x}{x} = -3$, akkor $x = -1$.	2 pont*
Az egyenletnek a fenti négy megoldása van. Ellenőrzés mutatja, hogy valóban mind kielégíti az egyenletet.	1 pont
Összesen:	10 pont

Megjegyzések:

1. Ha a versenyző nem találja meg mind a négy megoldást $\frac{1-2x}{x}$ -re, akkor a *-gal jelölt pontokból legfeljebb csak 1 pontot kaphat.

2. A harmadik sorban szereplő egyenlet az alábbi módszerrel is megoldható:

- Teljes négyzetté alakítás után:

$$\left(\frac{1-2x}{x} + 3 \cdot \frac{x}{1-2x}\right)^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{1-2x}{x} \cdot \frac{x}{1-2x} = 10.$$

- A megfelelő műveletek elvégzése után

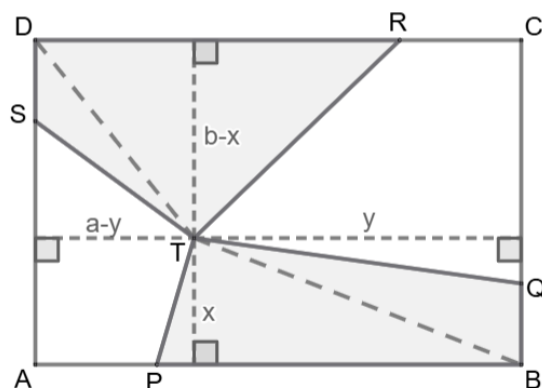
$$\left(\frac{1-2x}{x} + 3 \cdot \frac{x}{1-2x}\right)^2 = 16,$$

$$\text{amiből } \frac{1-2x}{x} + 3 \cdot \frac{x}{1-2x} = 4 \text{ vagy } \frac{1-2x}{x} + 3 \cdot \frac{x}{1-2x} = -4.$$

- A kapott egyenletek mindegyike másodfokú egyenletre vezet.

5. Az ABCD téglalap AB oldalának A-hoz, BC oldalának B-hez, CD oldalának C-hez, valamint DA oldalának D-hez legközelebb eső negyedelő pontja rendre P, Q, R, valamint S. A téglalap egy belső T pontjára teljesül, hogy a PTQB négyszög területe harmadrésze az ABCD téglalap területének. Mekkora az STRD négyszög és az ABCD téglalap területének aránya?

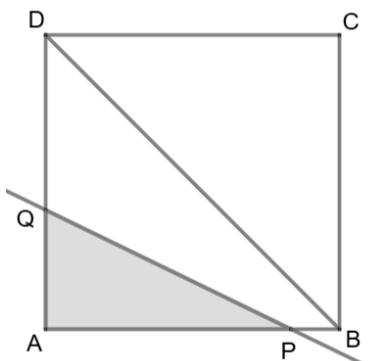
Ábrát készítünk a feladat szövege alapján. A téglalap AB oldalának hosszát a -val, BC oldalának hosszát b -vel jelöljük. A T pontból a téglalap oldalaira merőlegeseket állítunk és a T pont AB oldaltól való távolságát x , a BC oldaltól való távolságát y jelöli. Ekkor a T pont CD oldaltól való távolsága $b - x$, a DA oldaltól való távolsága $a - y$.

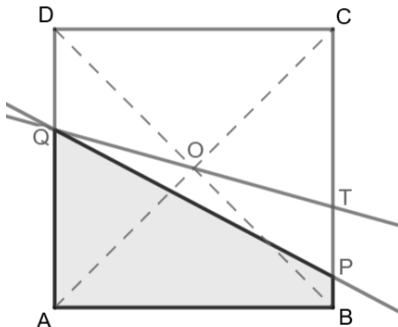


1 pont

A $PTQB$ négyszög területe a PTB és a BTQ háromszögek területének összege, ezért $T_{PTQB} = \frac{\frac{3}{4}ax}{2} + \frac{\frac{1}{4}by}{2} = \frac{3ax + by}{8}.$	2 pont
A feladat feltétele alapján a $PTQB$ négyszög területe az $ABCD$ téglalap területének harmadrésze, ezért $\frac{3ax + by}{8} = \frac{ab}{3},$ amiből (1) $3ax + by = \frac{8}{3}ab.$	2 pont
Az $STRD$ négyszög területe az STD és a DTR háromszögek területének összege, így $T_{STRD} = \frac{\frac{1}{4}b(a-y)}{2} + \frac{\frac{3}{4}a(b-x)}{2} = \frac{4ab - by - 3ax}{8}.$	2 pont
Az (1) összefüggést felhasználva $T_{STRD} = \frac{4ab - (3ax + by)}{8} = \frac{4ab - \frac{8}{3}ab}{8} = \frac{1}{6}ab.$	2 pont
Az $STRD$ négyszög és az $ABCD$ téglalap területének aránya $\frac{1}{6}$.	1 pont
Összesen:	10 pont

6. Egy négyzet csúcsainak koordinátái: $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(2; 2)$ és $(0; 2)$. Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes felezi a négyzet területét, továbbá az $y = \frac{x^2}{2}$ egyenletű parabolát két olyan pontban metszi, amelyek első koordinátáinak különbsége $\sqrt{13}$. Határozzuk meg az a és a b paraméter értékét.

Megmutatjuk, hogy ha egy egyenes felezi egy négyzet területét, akkor az egyenes átmegy a négyzet középpontján.	1 pont
A fenti állítás a négyzet átlóira nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy egy egyenes az $ABCD$ négyzet két szomszédos oldalát metszi, az AB oldalt P-ben, az AD oldalt Q-ban. Ekkor az APQ háromszög területe kisebb az ABD háromszög területénél, így a PQ egyenes nem oszthatja két egyenlő területű részre az $ABCD$ négyzetet. 	1 pont

Tegyük fel, hogy egy egyenes az $ABCD$ négyzet két szemközti oldalát metszi, a BC oldalt P-ben, az AD oldalt Q-ban és az egyenes nem megy át a négyzet O középpontján. Jelölje T az OQ egyenes és a BC oldal metszéspontját. Az OQ egyenes az $ABCD$ négyzetet két egybevágó részre bontja, ezért az $ABTQ$ trapéz területe épp az $ABCD$ négyzet területének a fele. A P és a T pontok különböznek egymástól, ezért P a BT vagy a CT szakasz belső pontja. Ha a P pont a BT szakasz belső pontja, akkor az $ABPQ$ négyszög területe kisebb az $ABTQ$ trapéz területénél, így a négyzet területének a felénél is. A négyzet középpontjára nem illeszkedő egyenes ezek szerint nem felezheti a négyzet területét. 	1 pont
A feladatban szereplő négyzet középpontja $O(1; 1)$. Mivel az $y = ax + b$ egyenletű egyenes felezi a négyzet területét, ezért az O pont illeszkedik az egyenesre, így (1) $1 = a + b.$	1 pont
Az egyenes és az $y = \frac{x^2}{2}$ egyenletű parabola metszéspontjainak koordinátáira $\frac{x^2}{2} = ax + b,$ $x^2 - 2ax - 2b = 0.$	1 pont
A kapott egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{2a + \sqrt{4a^2 + 8b}}{2}, x_2 = \frac{2a - \sqrt{4a^2 + 8b}}{2}.$	1 pont
A metszéspontok első koordinátáinak különbségére $x_1 - x_2 = \sqrt{4a^2 + 8b} = \sqrt{13},$ amiből $4a^2 + 8b = 13.$	1 pont
Az (1) összefüggés alapján $b = 1 - a$, amit felhasználva adódik, hogy $4a^2 + 8(1 - a) = 13,$ amiből azt kapjuk, hogy $4a^2 - 8a - 5 = 0.$	1 pont
A kapott másodfokú egyenlet gyökei: $a = \frac{5}{2}$ és $a = -\frac{1}{2}$.	1 pont
A feladatnak két megoldása van: $a = \frac{5}{2}, b = -\frac{3}{2}$ és $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$.	1 pont
Összesen:	10 pont