



12. évfolyam
Pontozási útmutató

1. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{3^x - 3^{x-2}}{2^x - 2^{x-2}} \cdot \frac{4^x - 4^{x-2}}{9^x - 9^{x-2}} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya a valós számok halmaza. (Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt egyik nevező sem lehet 0.)

A bal oldalon álló második törtben szorzatokat alakítunk ki:

$$\frac{3^x - 3^{x-2}}{2^x - 2^{x-2}} \cdot \frac{(2^x - 2^{x-2}) \cdot (2^x + 2^{x-2})}{(3^x - 3^{x-2}) \cdot (3^x + 3^{x-2})} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

2 pont

Az egyszerűsítések elvégzése után adódik, hogy

$$\frac{2^x + 2^{x-2}}{3^x + 3^{x-2}} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

1 pont

A bal oldalon álló tört számlálójában és nevezőjében kiemelés után kapjuk, hogy

$$\frac{2^x \cdot (1 + 2^{-2})}{3^x \cdot (1 + 3^{-2})} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x,$$

majd a műveletek elvégzése után

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \frac{9}{8} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x.$$

2 pont

Mindkét oldalon $\frac{2}{3}$ alapú hatványt alakítunk ki: $\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}$.

1 pont

A $\frac{2}{3}$ alapú exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenő,

1 pont

ezért $x \geq 2 - x$.

1 pont

A kapott egyenlőtlenség megoldása: $x \geq 1$.

1 pont

Ekvivalens átalakításokat végeztünk az értelmezési tartományon, így a kapott számok valóban kielégítik az egyenlőtlenséget.

1 pont

Összesen: 10 pont

2. Melyek azok a pozitív p prímszámok, amelyekre az

$$f(x) = x^2 + px - 60p$$

hozzárendelési szabállyal értelmezett függvény mindkét zérushelye egész szám?

Az f függvény zérushelyei

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 240p}}{2}.$$

A p prímszám, ezért $p^2 + 240p > 0$, így az f függvénynek bármely p érték mellett két zérushelye van.

2 pont



Ahhoz, hogy a függvény zérushelyei egész számok legyenek szükséges, hogy $p^2 + 240p$ négyzetszám legyen.	2 pont
A p prím kiemelése után $p^2 + 240p = p(p + 240)$, ami csak akkor lehet négyzetszám, ha $p p + 240$, amiből következik, hogy $p 240$.	2 pont
A 240 prímosztói: 2, 3, 5, ezért $p = 2$, vagy $p = 3$, vagy $p = 5$ lehet.	1 pont
Ha $p = 2$, akkor $p^2 + 240p = 484 = 22^2$. Ekkor $f(x) = x^2 + 2x - 120$, aminek zérushelyei $x_1 = 10, x_2 = -12$. A kapott gyökök egészek, ezért $p = 2$ megoldása a feladatnak.	1 pont
Ha $p = 3$, akkor $p^2 + 240p = 729 = 27^2$. Ekkor $f(x) = x^2 + 3x - 180$, aminek zérushelyei $x_1 = 12, x_2 = -15$. A kapott gyökök egészek, ezért $p = 3$ megoldása a feladatnak.	1 pont
Ha $p = 5$, akkor $p^2 + 240p = 1225 = 35^2$. Ekkor $f(x) = x^2 + 5x - 300$, aminek zérushelyei $x_1 = 15, x_2 = -20$. A kapott gyökök egészek, ezért $p = 5$ megoldása a feladatnak.	1 pont
Összesen:	10 pont

3. Egy középiskolában első alkalommal hirdették meg az Ikerk Vetélkedője nevű rendezvényt. Az eseményre 6 ikerpár, összesen 12 versenyző jelentkezett. A szervezők végül úgy döntöttek, hogy az ikerekből négyfős csapatokat szerveznek úgy, hogy semelyik csapatban nem lehetnek együtt testvérek. Összesen hányféleképpen történhet a csapatok kialakítása?
Két csapatösszeállítást különbözőnek tekintünk, ha van olyan ember, akinek mások a csapattársai.

Az első csapatba először kiválasztjuk a 6 ikerpárból azt a négyet, amelyek közül egy-egy iker szerepel a csapatban. Ezt összesen $\binom{6}{4} = 15$ -féleképp tehetjük meg.	1 pont
A négy ikerpár mindegyikéből 2-féleképp, így összesen $2^4 = 16$ -féleképp választhatunk csapattagokat,	1 pont
ezért az első csapat tagjainak kiválasztása $15 \cdot 16 = 240$ -féleképp történhet.	1 pont
A második csapat kiválasztása előtt még két „teljes” ikerpárból, és további négy olyan emberből választhatunk, akik között már nincsenek testvérek. A „teljes” ikerpárokból egy-egy embert ki kell választanunk, különben a harmadik csapatba mindenképp kerülnének testvérek. Erre $2 \cdot 2 = 4$ lehetőségünk van.	2 pont
A második csapatba még 2 embert kell választanunk a maradék 4 emberből, amit $\binom{4}{2} = 6$ -féleképp tehetünk meg.	1 pont
A második csapat összesen $4 \cdot 6 = 24$ -féleképp választható ki.	1 pont
Ezután a még kiválasztásra nem került emberek alkotják a harmadik csapatot. Ha a csapatok sorrendjére is tekintettel vagyunk, akkor összesen $240 \cdot 24 = 5760$ -féleképp történhet a kiválasztásuk.	1 pont

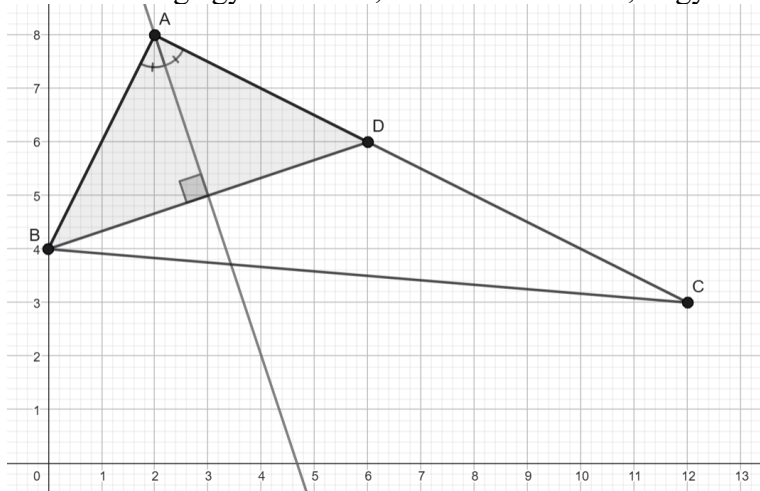


Mivel a csapatok sorrendje nem számít, ezért kiválasztásukra $\frac{5760}{3!} = 960$ lehetőség adódik.	2 pont
Összesen:	10 pont

Megjegyzés: A versenyző maximális pontot kaphat, ha választát nem egyetlen számmal, hanem egy helyes műveltsor megadásával adja meg, pl. $\frac{\binom{6}{4} \cdot 2^4 \cdot 2^2 \cdot \binom{4}{2}}{3!}$, ugyanakkor a válasz szöveges indoklás nélküli megadása esetén legfeljebb 3 pontot kaphat.

4. Az ABC háromszög C csúcsának koordinátái $C(12; 3)$, B csúcsa az y -tengelyre illeszkedik. A B pontból az A csúcsnál lévő szög belső szögfelezőjére emelt merőleges az AC oldalt a $D(6; 6)$ pontban metszi. A háromszög oldalaira teljesül, hogy $AB:AC = 2:5$. Határozzuk meg az ABC háromszög hiányzó csúcsainak koordinátáit.

Az ABD háromszög A csúcsnál lévő belső szögfelezője merőleges a BD oldalra, ezért az ABD háromszög egyenlő szárú, amiből következik, hogy $AB = AD$.



A feladat feltételei alapján $AB:AC = AD:AC = 2:5$, ezért a D pont az AC szakaszt 2:3 arányban osztja.

Jelölje az A pont koordinátáit $A(a_1; a_2)$, ekkor az osztópont koordinátáira vonatkozó összefüggés alapján

$$\begin{cases} \frac{3a_1 + 2 \cdot 12}{5} = 6 \\ \frac{3a_2 + 2 \cdot 3}{5} = 6, \end{cases}$$

amiből $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, azaz $A(2; 8)$.

Az AC oldal hossza $AC = \sqrt{(12-2)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$, ezért $AB = \frac{2}{5}AC = 2\sqrt{5}$.

A B pont illeszkedik az A középpontú $r = 2\sqrt{5}$ sugarú körre, ezért koordinátái kielégítik az

$$(x-2)^2 + (y-8)^2 = 20$$

egyenletet.

1 pont



A B csúcs első koordinátája 0, azaz $2^2 + (y - 8)^2 = 20$, amiből $(y - 8)^2 = 16$. A kapott egyenletnek két megoldása van, $y_1 = 4$ és $y_2 = 12$.	2 pont
A feladatnak feltételeinek két háromszög is eleget tesz. Ezek hiányzó csúcsai: A(2; 8) és B(0; 4), illetve A(2; 8) és B(0; 12).	1 pont
Összesen:	10 pont

Megjegyzések:

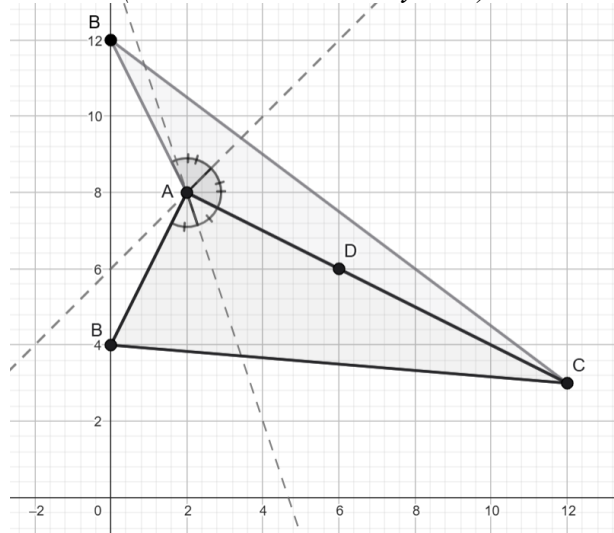
1. A *-gal jelölt pontokat a versenyző akkor is megkaphatja, ha vektorokkal dolgozik.

– Ha az A pont koordinátáit $A(a_1; a_2)$ jelöli, akkor $\vec{AD}(6 - a_1; 6 - a_2)$, és $\vec{AC}(12 - a_1; 3 - a_2)$. 1 pont

– Mivel $\vec{AD} = \frac{2}{5}\vec{AC}$, ezért $6 - a_1 = \frac{2}{5}(12 - a_1)$ és $6 - a_2 = \frac{2}{5}(3 - a_2)$, amiből $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, azaz A(2; 8). 1 pont

2. Ha a versenyző csak az egyik megoldást találja meg, akkor maximum 8 pontot kaphat.

3. A két megoldást mutató ábra (nem elvárás a versenyzőtől):

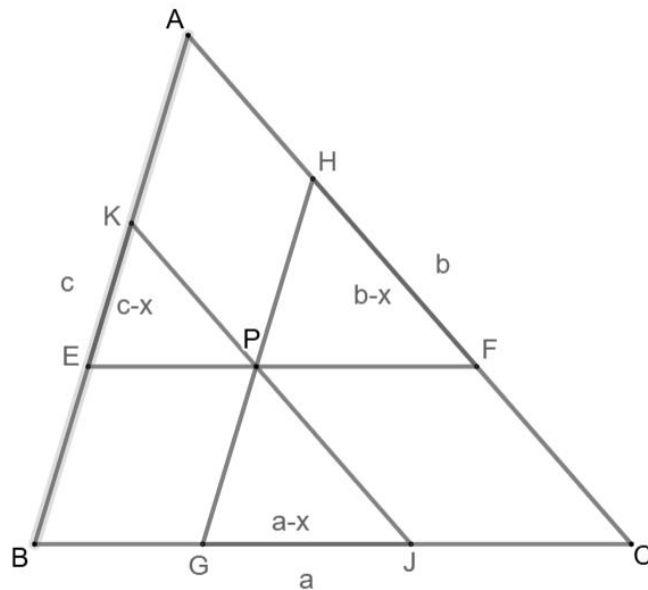


5. A hegyesszögű ABC háromszög oldalainak hossza $BC = a, CA = b, AB = c$. A háromszög belsejében fekvő egyik ponton át párhuzamosokat húzunk a háromszög oldalával úgy, hogy a kapott egyenesek háromszögbe eső szakaszainak hossza megegyezik. Bizonyítsuk be, hogy ha az így kialakuló párhuzamos szakaszok közös hosszát x jelöli, akkor

$$x \leq \frac{2}{9}(a + b + c).$$

Ábrát készítünk a feladat szövege alapján, melyen a háromszög belsejében fekvő pontot P-vel, a háromszög oldalával párhuzamos szakaszok metszéspontjait a BC oldalon G-vel és J-vel, a CA oldalon H-vel és F-fel, valamint az AB oldalon K-vel és E-vel jelöljük (ld. ábra).

1 pont



Az így kialakuló $EBGP$ és $PJCF$ négyszögek szemközti oldalai párhuzamosak, ezért mindkét négyszög paralelogramma, így szemközti oldalai egyenlők. Ebből adódóan

$$GJ = a - BG - JC = a - EP - PF = a - x.$$

Ehhez hasonló gondolatmenettel belátható, hogy $EK = c - x$ és $FH = b - x$.

Az ABC és PGJ háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak egymással, ezért a két háromszög hasonló egymáshoz. Az egymásnak megfelelő oldalai aránya megegyezik, amiből következik, hogy

$$\frac{PG}{AB} = \frac{GJ}{BC}$$

azaz

$$\frac{PG}{c} = \frac{a - x}{a}.$$

A kapott összefüggésből a PG szakasz hosszát kifejezve $PG = \frac{(a-x)c}{a}$.

2 pont

A fentihez hasonló gondolatmenet után a $PH = \frac{(b-x)c}{b}$ összefüggéshez jutunk.

A kapott két egyenlőség megfelelő oldalait összeadva

$$x = PG + PH = \frac{(a-x)c}{a} + \frac{(b-x)c}{b},$$

2 pont

amiből

$$abx = (a-x)bc + (b-x)ac.$$

A zárójelek felbontása és rendezés után azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{2abc}{ab + bc + ca}.$$

1 pont



Megmutatjuk, hogy	
$\frac{2abc}{ab+bc+ca} \leq \frac{2}{9}(a+b+c).$	
Az egyenlőtlenség bal oldalán álló tört nevezőjében kialakítjuk 3 tag számtani közepét, majd a tört értékét (az ab, bc, ca számokra vonatkozóan) a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alkalmazásával növeljük:	
$\frac{2abc}{ab+bc+ca} = \frac{\frac{2}{3}abc}{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leq \frac{\frac{2}{3}abc}{\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{abc}.$	2 pont*
Ismét a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával	
$\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{abc} \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{a+b+c}{3} = \frac{2}{9}(a+b+c).$	1 pont*
Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b = c$, azaz ha az ABC háromszög szabályos.	1 pont
Összesen:	10 pont

Megjegyzés: a *-gal jelölt pontokat a versenyző az alábbi gondolatmenetek bármelyikéért megkaphatja.

1. gondolatmenet:

- A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalán álló tört számlálóját és nevezőjét abc -vel osztva

$$x = \frac{2abc}{ab+bc+ca} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \quad 1 \text{ pont}$$

- A harmonikus és számtani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség alapján

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3}, \quad 1 \text{ pont}$$

- amiből $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{2}{9}(a+b+c).$ 1 pont

2. gondolatmenet:

- A bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens alakja:

$$9abc \leq (a+b+c)(ab+bc+ca).$$

A zárójelek felbontása, rendezés és összevonás után azt kapjuk, hogy

$$0 \leq a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 - 6abc.$$

1 pont

- A jobb oldalon álló tagokat csoportosítva

$$0 \leq (a^2b + c^2b - 2abc) + (b^2a + c^2a - 2abc) + (a^2c + b^2c - 2abc),$$

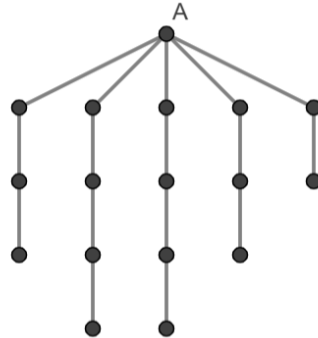
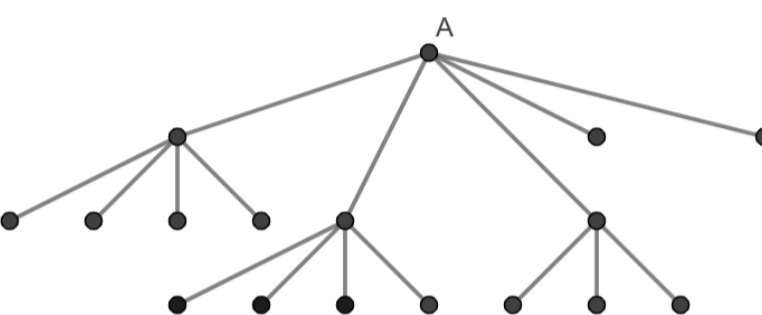
amiből kiemelés után teljes négyzeteket kapunk:

$$0 \leq b(a-c)^2 + a(b-c)^2 + c(a-b)^2.$$

A jobb oldalon álló tagok nemnegatívak, és az átalakítások ekvivalensek voltak, amiből az eredeti egyenlőtlenség már következik. 2 pont



6. Egy ország 17 kisebb-nagyobb településből áll. Bármely két különböző település közt legfeljebb egy közvetlen utat építettek, továbbá bármelyik településből el lehet jutni bármelyik másik településbe, esetleg más települések érintésével. Az utak megépítésével ugyanakkor spóroltak, mert nincs két olyan település, amelyek közt két különböző útvonal lenne. A települések közt vannak zsákfalvak, azaz olyanok, amelyekből pontosan egy másik településbe vezet közvetlen út. Legalább és legfeljebb hány zsákfalu lehet az országban, ha a fővárosból pontosan 5 út indul ki, és semelyik másik településből nem indul ennél több út?

A települések legyenek egy gráf csúcsai, két csúcsot kössünk össze éllel, ha egyikből a másikba közvetlen út vezet. A feladat feltételei alapján az így értelmezett gráf összefüggő és körmentes, azaz fagraf. Megmutatjuk, hogy az országban legalább 5 zsákfalu van.	1 pont	
Tekintsünk az ország fővárosát (legyen ez A), amelyből 5 út indul. Az A településből mind az 5 úton indítsunk el egy-egy autót. Ezek az autók egy-egy új településbe jutnak, ahonnan (ha lehetséges) tovább küldjük őket egy-egy, eddig még nem bejárt úton. Miután az autók elhagyták az A települést, később már nem találkozhatnak egymással, hiszen a települések gráfja nem tartalmaz kört. Az autók előbb-utóbb olyan településbe jutnak, amelyből már nem tudnak elindulni még nem bejárt úton, hiszen a gráfnak véges sok csúcsa van. Ezekbe a településekbe 1 út vezet, azaz a gráfbeli fokszámuk 1. Mivel 5 autó indult el, ezért legalább 5 zsákfalu van az országban.	2 pont	
Az 5 zsákfalu megvalósítható, például ahogy azt az alábbi gráf szemlélteti.		2 pont
Megmutatjuk, hogy az országban legfeljebb 13 zsákfalu lehet.	1 pont	
A 13 zsákfalu megvalósítható, például ahogy azt az alábbi ábra mutatja.		2 pont



Indirekt módon tegyük fel, hogy az országban van (legalább) 14 zsákfalu. Minden zsákfalu pontosan egy településhez kapcsolódik egy-egy úttal, és minden településhez legfeljebb 4 zsákfalu kapcsolódik. Ha ugyanis 5 zsákfalu kapcsolódna valamelyik településhez, akkor abból a településből több út már nem indulhat ki, ezért abból csak a hozzá kapcsolódó zsákfalvakat érhetnénk el, ami ellentmond annak, hogy a gráf összefüggő. A 14 zsákfalu ezért legalább további $\left[\frac{14}{4} \right] + 1 = 4$ települést feltételez, így a települések száma 18 lenne. Ellentmondásunk igazolja, hogy legfeljebb 13 zsákfalu lehet az országban.	2 pont
Összesen:	10 pont