



12. évfolyam

1. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{3^x - 3^{x-2}}{2^x - 2^{x-2}} \cdot \frac{4^x - 4^{x-2}}{9^x - 9^{x-2}} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

(10 pont)

2. Melyek azok a pozitív p prímszámok, amelyekre az

$$f(x) = x^2 + px - 60p$$

hozzárendelési szabállyal értelmezett függvény mindkét zérushelye egész szám?

(10 pont)

3. Egy középiskolában első alkalommal hirdették meg az Ikerk Vetélkedője nevű rendezvényt. Az eseményre 6 ikerpár, összesen 12 versenyző jelentkezett. A szervezők végül úgy döntöttek, hogy az ikerekből négyfős csapatokat szerveznek úgy, hogy semelyik csapatban nem lehetnek együtt testvérek. Összesen hányféleképpen történhet a csapatok kialakítása?

Két csapatösszeállítást különbözőnek tekintünk, ha van olyan ember, akinek mások a csapattársai.

(10 pont)

4. Az ABC háromszög C csúcsának koordinátái $C(12; 3)$, B csúcsa az y -tengelyre illeszkedik. A B pontból az A csúcsnál lévő szög belső szögfelezőjére emelt merőleges az AC oldalt a $D(6; 6)$ pontban metszi. A háromszög oldalaira teljesül, hogy $AB:AC = 2:5$. Határozzuk meg az ABC háromszög hiányzó csúcsainak koordinátáit.

(10 pont)

5. A hegyesszögű ABC háromszög oldalainak hossza $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. A háromszög belsejében fekvő egyik ponton át párhuzamosokat húzunk a háromszög oldalával úgy, hogy a kapott egyenesek háromszögbe eső szakaszainak hossza megegyezik. Bizonyítsuk be, hogy ha az így kialakuló párhuzamos szakaszok közös hosszát x jelöli, akkor

$$x \leq \frac{2}{9}(a + b + c).$$

(10 pont)

6. Egy ország 17 kisebb-nagyobb településből áll. Bármely két különböző település közt legfeljebb egy közvetlen utat építettek, továbbá bármelyik településből el lehet jutni bármelyik másik településbe, esetleg más települések érintésével. Az utak megépítésével ugyanakkor spóroltak, mert nincs két olyan település, amelyek közt két különböző útvonal lenne. A települések közt vannak zsákfalvak, azaz olyanok, amelyekből pontosan egy másik településbe vezet közvetlen út. Legalább és legfeljebb hány zsákfalva lehet az országban, ha a fővárosból pontosan 5 út indul ki, és semelyik másik településből nem indul ennél több út?

(10 pont)