



11. évfolyam
Pontozási útmutató

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a pozitív egész számhármasok halmazán.

$$\begin{cases} xy + yz = 161 \\ xz + yz = 144 \end{cases}$$

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| Az első és a második egyenlet megfelelő oldalainak különbsége $xy - xz = 17,$ | 1 pont |
| amelyből a bal oldal szorzattá alakítása után kapjuk, hogy $x(y - z) = 17.$ | 1 pont |
| Mivel a 17 prímszám, ezért két lehetőség adódik: 1. $x = 1$ és $y - z = 17$, azaz $y = z + 17$. 2. $x = 17$ és $y - z = 1$, azaz $y = z + 1$. | 2 pont |
| 1. eset. Ha $x = 1$, akkor az első egyenletből $y + yz = 161$. Mivel $y = z + 17$ ezért $z + 17 + (z + 17)z = 161$, amelyből a $z^2 + 18z - 144 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. | 1 pont |
| A kapott egyenlet gyökei $z = 6$ és $z = -24$. Mivel z pozitív egész szám, ezért csak $z = 6$ lehetséges, ekkor $y = 23$. | 1 pont |
| 2. eset. Ha $x = 17$, akkor az első egyenletből $17y + yz = 161$. Mivel $y = z + 1$ ezért $17z + 17 + (z + 1)z = 161$, amelyből ismét a $z^2 + 18z - 144 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. | 1 pont |
| A kapott egyenlet pozitív megoldása $z = 6$, ekkor $y = 7$. | 1 pont |
| Az egyenletrendszernek két megoldása van: $x = 1, y = 23, z = 6$, és $x = 17, y = 7, z = 6$. | 1 pont |
| Ellenőrzés mutatja, hogy mindkét megoldás megfelel a feladat feltételeinek. | 1 pont |
| Összesen: | 10 pont |



2. Melyek azok a 2-nél nagyobb n egész számok, amelyekre az

$$A = \frac{(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot \dots \cdot (n^2 - 1)}{2}$$

kifejezés értéke négyzetszám?

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| A tört számlálójában lévő tényezőket szorzattá alakítjuk: $A = \frac{(2 - 1) \cdot (2 + 1) \cdot (3 - 1) \cdot (3 + 1) \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot (n + 1)}{2}$ | 2 pont |
| Mivel $(2 - 1) \cdot (3 - 1) \cdot \dots \cdot (n - 1) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1),$ és $(2 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot \dots \cdot (n + 1) = 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n + 1),$ | 2 pont |
| ezért $A = 3^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (n - 1)^2 \cdot n \cdot (n + 1).$ | 1 pont |
| A kapott szorzat első $n - 1$ tényezője négyzetszám, ezért A értéke pontosan akkor négyzetszám, ha $n \cdot (n + 1)$ is négyzetszám. | 1 pont |
| Mivel n és $n + 1$ relatív prímek, ezért szorzatuk csak akkor lehet négyzetszám, ha mindkettő négyzetszám. | 2 pont* |
| A pozitív négyzetszámok között nincsenek szomszédosok, | 1 pont* |
| ezért A értéke egyetlen n esetén sem négyzetszám. | 1 pont |
| Összesen: | 10 pont |

Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat a versenyző akkor is megkaphatja, ha más módszerrel igazolja, hogy az $n \cdot (n + 1)$ értéke nem lehet négyzetszám. Például:

- mivel $n \cdot (n + 1) = n^2 + n > n^2$, 1 pont
- továbbá $n \cdot (n + 1) < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, 1 pont
- ezért $n \cdot (n + 1)$ értéke két szomszédos négyzetszám közé esik, így biztosan nem négyzetszám. 1 pont

3. Az f függvényt a pozitív számok halmazán az

$$f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{x}} \cdot (x^2 - 6x + 10)$$

hozzárendelési szabállyal értelmezzük. Határozzuk meg az f függvény minimumát. Az értelmezési tartomány mely elemére veszi fel a függvény a minimumát?

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| A zárójelben álló másodfokú kifejezést teljes négyzetté alakítjuk: $x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1.$ | 1 pont |
| A kapott alakból következik, hogy $x^2 - 6x + 10 \geq 1$, és egyenlőség $x = 3$ esetén teljesül. | 2 pont |
| Megmutatjuk, hogy az $\frac{x+3}{\sqrt{x}}$ tört is $x = 3$ esetén éri el minimumát és $\frac{x+3}{\sqrt{x}} \geq 2 \cdot \sqrt{3}$. | 1 pont |
| A bizonyítandó állítás mindkét oldalát a pozitív \sqrt{x} -szel szorozva $x + 3 \geq 2 \cdot \sqrt{3}x,$ | 1 pont* |



| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| amiből 0-ra rendezés után adódik, hogy $x - 2 \cdot \sqrt{3}x + 3 \geq 0$. | |
| A bal oldalon álló kifejezés teljes négyzetté alakítása után azt kapjuk, hogy $(\sqrt{x} - \sqrt{3})^2 \geq 0.$ | 2 pont* |
| A fenti egyenlőtlenség minden pozitív x -re teljesül és átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért $\frac{x+3}{\sqrt{x}} \geq 2 \cdot \sqrt{3}$. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x = 3$. | 1 pont* |
| Az f függvény hozzárendelési szabályában szereplő mindkét tényező $x = 3$ esetén veszi fel minimumát, ezért f -nek is ekkor van minimuma. | 1 pont |
| Az f függvény minimuma megegyezik a két tényező minimumának szorzatával, azaz a minimum értéke $(2 \cdot \sqrt{3}) \cdot 1 = 2 \cdot \sqrt{3}$. | 1 pont |
| Összesen: | 10 pont |

Megjegyzés: A *-gal jelölt pontokat a versenyző akkor is megkaphatja, ha helyesen alkalmazza a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget.

– Mivel $\frac{x+3}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$ 1 pont

– ezért a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 2 \cdot \sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}}} = 2 \cdot \sqrt{3}. \quad 2 \text{ pont}$$

– Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}}$ azaz ha $x = 3$. 1 pont

4. A Vonós Vágta nevű tehetségkutató verseny döntőjébe 7 hegedűművész jutott be. A versenyzők számára a döntő előtti éjszakára a szervezők egy szálloda teljes szintjét lefoglalták. A lefoglalt folyosó bal és jobb oldalán is 8 szoba van, így összesen 16 szobában tudják a versenyzőket elszállásolni. Hányféleképp történhet a szobák kiosztása a döntősök között, ha bármely két ugyanazon oldalon elszállásolt versenyző szobája között legalább 1 üres szobát akarnak hagyni a szervezők? Minden szobában egy versenyzőt lehet elszállásolni és két foglalást különbözőnek tekintünk, ha legalább egy versenyző másik szobában kapott helyett.

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| Semelyik oldalon nem lehet 5 kiosztott szoba, ezért az egyik oldalon 4, a másik oldalon 3 szobát kell a szervezőknek a versenyzők rendelkezésére bocsátania. | 1 pont |
| Azt az oldalt, amelyiken 4 szoba kerül kiosztásra 2-féleképp választhatjuk ki. | 1 pont |
| Ha ezen az oldalon a szobákat egymás után 1-től 8-ig számozzuk, akkor az (1; 3; 5; 7), (1; 3; 5; 8), (1; 3; 6; 8), (1; 4; 6; 8), vagy a (2; 4; 6; 8) sorszámú szobákat oszthatjuk ki a versenyzők számára, azaz 5-féleképp történhet a szobák kiosztása. | 2 pont |
| A másik oldalon 5 szoba marad üresen. Egy kiosztásra szánt szoba lehet az első üres szoba előtt, két üres szoba között vagy az ötödik üres szoba után, ezért összesen 6 hely adódik a 3 szoba helyének kiválasztásukra. A 3 szobát ezért $\binom{6}{3} = 20$ -féleképp választhatjuk ki. | 2 pont* |
| A versenyzők számára a 7 szobát összesen $2 \cdot 5 \cdot 20 = 200$ -féleképp jelölhetjük ki. | 1 pont |



| | |
|----------------------------------------------------------------------------|----------------|
| A kijelölt szobákban a versenyzők elhelyezésére $7! = 5040$ lehetőség van. | 1 pont |
| Összesen tehát $200 \cdot 5040 (= 1008000)$ különböző foglalás lehetséges. | 2 pont |
| Összesen: | 10 pont |

Megjegyzések:

1. A *-gal jelölt pontokat a versenyző akkor is megkaphatja, ha az összes lehetőség felsorolása után számolja össze az eseteket.

2. A versenyző maximális pontot kaphat, ha választát nem egyetlen számmal, hanem egy helyes műveltsor megadásával adja meg, pl. $2 \cdot 5 \cdot \binom{6}{3} \cdot 7!$, ugyanakkor a válasz szöveges indoklás nélküli megadása esetén legfeljebb 3 pontot kaphat.

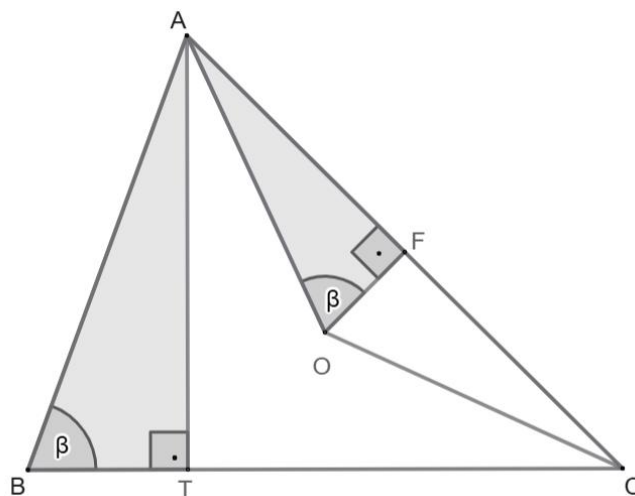
5. A hegyesszögű ABC háromszög A csúcsából induló magasságvonal BC oldalra illeszkedő talppontja T , a háromszög köré írható kör középpontja O . Az ABT és az AOC háromszögek területe megegyezik.

a) Számítsuk ki az ABC háromszög C csúcsánál lévő szög nagyságát.

b) Bizonyítsuk be, hogy $AT = BT + \sqrt{2} \cdot OT$.

Első megoldás

a) Ábrát készítünk a feladat szövege alapján, melyen az AC oldal felezőpontját F jelöli.



Ha az ABC háromszög B csúcsánál lévő szöget β jelöli, akkor (a kerületi és középponti szögek tétele alapján) az AOC háromszögben $\angle AOC = 2\beta$. Mivel az AOC háromszög egyenlő szárú, ezért $\angle AOF = \beta$.

1 pont

Az ABT és AOF háromszögek szögei páronként megegyeznek, ezért a két háromszög hasonló.

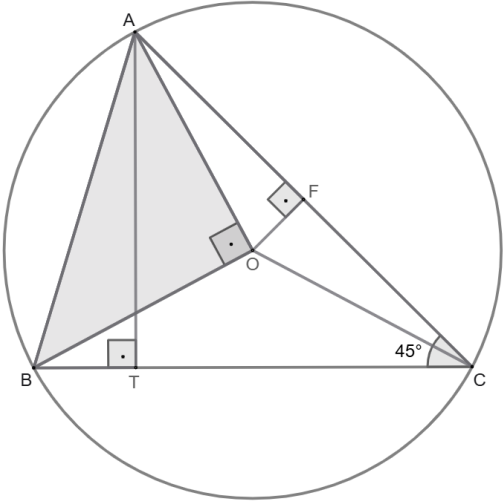
1 pont

A feltételek alapján az ABT és AOC háromszögek területe megegyezik, ezért az ABT és AOF háromszögek területének aránya

$$\frac{T_{ABT}}{T_{AOF}} = \frac{T_{ABT}}{\frac{T_{AOC}}{2}} = 2.$$

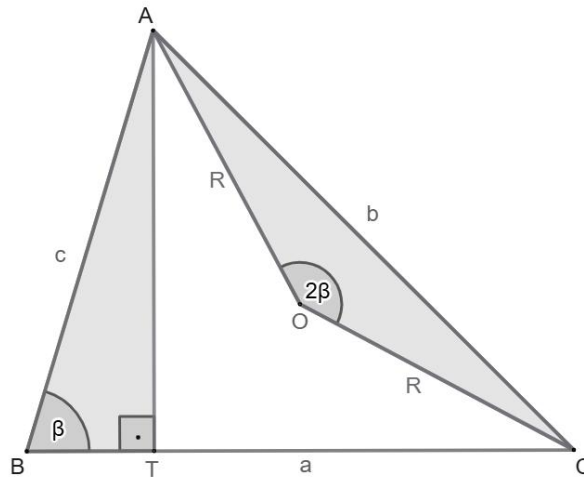
1 pont



| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| <p>Hasonló háromszögek területének aránya megegyezik a hasonlóság arányának négyzetével, ezért az ABT és AOF háromszögek hasonlóságának aránya $\lambda = \sqrt{2}$. A két háromszög hasonlóságát felhasználva $\frac{AB}{AO} = \sqrt{2}$ adódik, amiből $AB = \sqrt{2} \cdot AO$.</p> | 1 pont |
| <p>Mivel O az ABC háromszög köré írható kör középpontja, ezért $AO = BO$, így az ABO háromszög oldalainak négyzetére</p> $AO^2 + BO^2 = 2 \cdot AO^2 = (\sqrt{2} \cdot AO)^2 = AB^2,$ <p>amiből a Pitagorasz-tétel megfordítása alapján adódik, hogy az ABO háromszögben az O csúcsnál derékszög van.</p> | 1 pont |
| <p>Mivel $AOB\angle = 90^\circ$, ezért az ABC háromszög köré írható körében a C-t nem tartalmazó köríven 90°-os középponti szög nyugszik. A kerületi és középponti szögek tételéből következik, hogy $ACB\angle = 45^\circ$, így az ABC háromszög C csúcánál fekvő szög 45°-os.</p>  | 1 pont |
| <p>b) Az ACT háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, ezért a T csúcs illeszkedik az AC szakasz felező merőlegesére. Mivel $AO = CO$, ezért az O pont szintén illeszkedik az AC szakasz felező merőlegesére, amiből adódik, hogy az F, O, T pontok egy egyenesen vannak.</p> | 2 pont |
| <p>Az ATF háromszög szintén egyenlő szárú és derékszögű, amiből következik, hogy $AT = \sqrt{2} \cdot FT = \sqrt{2} \cdot (FO + OT) = \sqrt{2} \cdot FO + \sqrt{2} \cdot OT$.</p> | 1 pont |
| <p>Ismét kihasználva az ABT és AOF háromszögek hasonlóságát kapjuk, hogy</p> $\frac{BT}{FO} = \lambda = \sqrt{2},$ <p>amiből $BT = \sqrt{2} \cdot FO$, amit visszahelyettesítve $AT = BT + \sqrt{2} \cdot OT$ adódik.</p> | 1 pont |
| Összesen: | 10 pont |

Második megoldás

a) Ábrát készítünk a feladat szövege alapján, melyen az ABC háromszög oldalait a szokásos módon, a háromszög köré írható kör sugarát R -rel jelöljük.



Ha az ABC háromszög B csúcsánál lévő szöget β jelöli, akkor (a kerületi és középponti szögek tétele alapján) az AOC háromszögben $\angle AOC = 2\beta$.

1 pont

Az ABT derékszögű háromszögben $TB = c \cdot \cos \beta$, valamint $TA = c \cdot \sin \beta$, ezért a háromszög területe

$$T_{ABT} = \frac{c^2 \cdot \sin \beta \cos \beta}{2}.$$

1 pont

Ha az ABC háromszög C csúcsánál lévő szöget γ jelöli, akkor $c = 2R \cdot \sin \gamma$, így adódik, hogy

$$T_{ABT} = 2R^2 \cdot \sin^2 \gamma \sin \beta \cos \beta,$$

amiből felhasználva a kétszeres szög szinuszára vonatkozó addíciós tételt azt kapjuk, hogy

$$T_{ABT} = R^2 \cdot \sin^2 \gamma \sin 2\beta.$$

1 pont

Az AOC háromszög területe

$$T_{AOC} = \frac{R^2 \cdot \sin 2\beta}{2}.$$

1 pont

A feltételek alapján az ABT és AOC háromszögek területe megegyezik, ezért

$$R^2 \cdot \sin^2 \gamma \sin 2\beta = \frac{R^2 \cdot \sin 2\beta}{2},$$

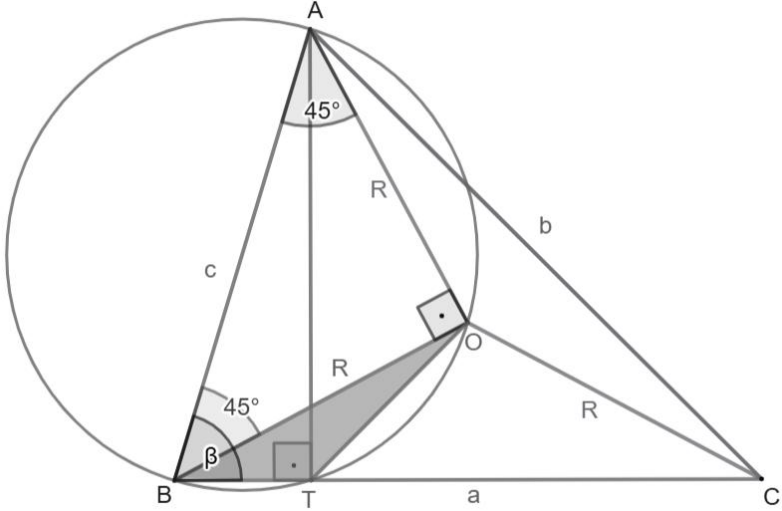
amiből egyszerűsítések elvégzése után (felhasználva, hogy $R^2 \cdot \sin 2\beta \neq 0$) azt kapjuk, hogy

$$\sin^2 \gamma = \frac{1}{2}.$$

1 pont

Mivel γ hegyesszög, ezért $\sin \gamma > 0$, így $\sin \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$, amiből $\gamma = 45^\circ$, tehát az ABC háromszög C csúcsánál fekvő szög 45° -os.

1 pont

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| <p>b) Az ABC háromszög köré írható körben alkalmazva a kerületi és középponti szögek tételét azt kapjuk, hogy $AOB\angle = 2\gamma = 90^\circ$, amiből következik, hogy az O és T pontok illeszkednek az AB szakasz Thalész-körére.</p> | 1 pont |
| <p>Az ABO háromszög egyenlőszárú, ezért $ABO\angle = BAO\angle = 45^\circ$. Ebből adódóan az OTB háromszögben $OBT\angle = \beta - 45^\circ$, továbbá a háromszög köré írható kör sugara $\frac{c}{2}$, ezért</p> $OT = 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \sin(\beta - 45^\circ) = c \cdot \sin(\beta - 45^\circ).$  | 1 pont |
| <p>A két szög különbségének szinuszára vonatkozó addíciós összefüggés alapján</p> $OT = c \cdot \sin(\beta - 45^\circ) = c \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta \right),$ <p>amiből</p> $OT = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (c \cdot \sin \beta - c \cdot \cos \beta),$ $OT = \frac{\sqrt{2}}{2} (AT - BT).$ | 1 pont |
| <p>Mindkét oldalt $\sqrt{2}$-vel szorozva, majd a megfelelő rendezést elvégezve adódik, hogy</p> $AT = BT + \sqrt{2} \cdot OT.$ | 1 pont |
| Összesen: | 10 pont |



6. Egy amatőr sakkbajnokságon legalább 4 versenyző vett részt. Bármely négy résztvevő között van olyan, aki a másik hárommal már játszott korábban. Bizonyítsuk be, hogy mindenképpen van olyan játékos közöttük, aki az összes többi versenyzővel játszott már korábban.

Első megoldás

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| Meg kell mutatnunk, hogy a feladat feltételeinek teljesülése esetén van olyan versenyző, aki mindenkivel játszott. | |
| Ha $n = 4$, akkor a résztvevők között van olyan, aki a másik hárommal játszott korábban, így a feladat állítása teljesül. | 2 pont |
| Ha $n > 4$, akkor indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy a feladat állítása nem igaz, azaz nincs olyan versenyző, aki mindenkivel játszott volna korábban. | 1 pont |
| Ekkor minden versenyzőhöz tartozik legalább egy másik versenyző, akivel még nem játszott. | 1 pont |
| Legyen A az egyik versenyző. Ekkor A sem játszott mindenkivel, ezért létezik olyan versenyző, jelöljük őt B -vel, akire teljesül, hogy A és B nem játszott egymással korábban. Válasszunk még két A -tól és B -től is különböző versenyzőt, jelöljük őket C -vel és D -vel. Az (A, B, C, D) játékosok között is van olyan, aki játszott már a másik hárommal. Ez a játékos sem A , sem B nem lehet, hiszen ők nem játszottak egymással. Nem jelent megszorítást, ha feltesszük, hogy C játszott korábban A -val, B -vel és D -vel is. | 2 pont |
| A C játékos sem játszott mindenkivel, ezért van olyan A -tól, B -től és D -től különböző játékos, jelöljük őt E -vel, akivel C még nem sakkozott. | 2 pont |
| Tekintsük az (A, B, C, E) versenyzőket. Köztük is van olyan, aki játszott a másik három versenyző mindegyikével. Ez a játékos sem A , sem B nem lehet, hiszen ők nem játszottak egymással, ugyanakkor sem C , sem E nem lehet, hiszen ők sem játszottak még egymással. Ellentmondásra jutottunk. | 1 pont |
| Ellentmondásunk igazolja, hogy az indirekt feltevésünk nem volt igaz, azaz valóban van a játékosok közt olyan, aki mindenkivel játszott. | 1 pont |
| Összesen: | 10 pont |

Második megoldás

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Meg kell mutatnunk, hogy a feladat feltételeinek teljesülése esetén van olyan versenyző, aki mindenkivel játszott. | |
| A fenti állítás nyilvánvalóan igaz, ha bármely két résztvevő játszott már korábban egymással. | 2 pont |
| A továbbiakban vizsgáljuk azt az esetet, amikor van két olyan versenyző, akik korábban még nem játszottak egymással. Jelöljük őket A -val és B -vel. Válasszunk melléjük két további versenyzőt, akiket C -vel és D -vel jelölünk. Az (A, B, C, D) résztvevők között van olyan, aki korábban már játszott a másik hárommal. Ez a versenyző sem A , sem B nem lehet, hiszen ők még nem mérköztek meg korábban. Nem jelent megszorítást, ha feltesszük, hogy C játszott korábban már A -val, B -vel és D -vel is. | 3 pont |



| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| Megmutatjuk, hogy C korábban már mindenkivel játszott. | 2 pont |
| A fenti állítás A -ra, B -re és D -re vonatkozóan igaz. Amennyiben a bajnokságnak vannak még további résztvevői, úgy válasszunk közülük egy tetszőlegest, jelöljük őt X -szel. Az (A, B, C, X) játkosok közül valaki már korábban sakkozott a többivel. Ez a versenyző sem A , sem B nem lehet (ők még nem mérköztek meg korábban), ezért vagy C , vagy X játszott már a másik hárommal. Bármelyik is teljesül C mindenképpen játszott X -szel (is). | 2 pont |
| Ezzel megmutattuk, hogy van olyan résztvevő, aki mindenkivel játszott, így a feladat állítását beláttuk. | 1 pont |
| Összesen: | 10 pont |