(9. osztály)

1. Egy számhalmaz elemeire igaz, hogy bármely elemének reciproka is és az ellentettje is eleme a halmaznak.

    a. Lehet-e a halmaz elemeinek száma 13? Ha igen, akkor adjunk meg egy ilyen halmazt!

    b. Lehet-e a halmaz eleminek száma 14? Ha igen, akkor adjunk meg egy ilyen halmazt!

(14 pont)

2. Egy háromszög oldalainak hossza egymást követő páros számok. Legalább mekkora ennek a háromszögnek a kerülete?

(14 pont)

3. Két város között vagy vonattal, vagy busszal lehet közlekedni. A vonat sebessége oda-vissza 90 km/h, míg a busz egyik irányban 80 km/h-val, visszafelé pedig 100 km/h-val képes haladni. Melyik közlekedési eszközzel járhatjuk be rövidebb idő alatt az oda-vissza utat?

(16pont)

4. Egy felmérésben két alkalommal lehetett részt venni (mindenki csak egy felmérésben vehetett részt). Az első alkalommal a résztvevők átlagpontszáma 35, a második alkalommal 50 pont volt, míg a teljes felmérésben részt vettek átlagpontszáma 40 pontnak bizonyult. Hányan vettek részt a felmérésben, ha az első alkalommal 25-tel többen voltak, mint a másodikban?

(18 pont)

5. Mennyi az $x+y$ összeg minimuma, ha $x^2+4x+8=4-|y-1|$?

(18 pont)

6. Egy *ABC* háromszög oldalainak hossza 5 cm, 12 cm és 13 cm. Megrajzoltuk az *O* középpontú beírható körét. Határozzuk meg az *AO*, *BO* és *CO* szakaszok hosszát!

(20 pont)

Versenyfeladatok szakgimnáziumok és technikumok tanulói számára 2023.

(10. osztály)

1. Melyik az a két természetes szám, amelyeknek a számtani közepe és a különbsége is 2024?

(14 pont)

2. Egy diszkoszvető versenyen az indulók 40%-a teljesítette a döntőbe jutás szintjét. Ha 7-tel kevesebben teljesítették volna a szintet, akkor 4-szer annyi kieső lett volna, mint ahány döntőbe jutó. Hányan indultak a versenyen?

(14 pont)

3. Két számról tudjuk, ha az egyik négyzetéhez hozzáadjuk a másik négyzetgyökét, akkor az egyik szám kétszeresénél 1-gyel kisebb számot kapunk. Melyek ezek a számok?

(16 pont)

4. Egy háromszög oldalainak hossza egymást követő páros számok, egy téglalap oldalainak hossza pedig a közéjük eső páratlan számok. A téglalap kerülete 8 cm-el nagyobb, mint a háromszög kerülete. Mekkora ebben az esetben a két síkidom területének különbsége?

(18 pont)

5. Egy matematika versenyen 20 kérdésből álló teszt feladatsort kell megoldani. Minden helyes válasz 5-5 pontot ér, viszont minden rossz válasz esetén 2-2 pontot levonnak. Ha egy kérdésre nincs válasz, akkor arra 0 pont jár. Legalább hány kérdésre nem válaszolt az a versenyző, akinek 48 pontja lett?

(18 pont)

6. Egy egységnyi oldalú $ABCD$ négyzet AB oldalára a négyzetbe befelé egy AB átmérőjű félkört szerkesztünk. A D csúcsból a félkörhöz húzott érintő a BC oldalt E pontban metszi. Mekkora a keletkező DEC háromszög területe?

(20 pont)

(9. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. **Egy számhalmaz elemeire igaz, hogy bármely elemének reciproka is és az ellentettje is eleme a halmaznak.**

    a. **Lehet-e a halmaz elemeinek száma 13? Ha igen, akkor adjunk meg egy ilyen halmazt!**

    b. **Lehet-e a halmaz eleminek száma 14? Ha igen, akkor adjunk meg egy ilyen halmazt!**

(14 pont)

Megoldás:
A halmaz elemei között nem szerepelhet a 0, hiszen ennek a reciproka nem értelmezhető.

(2 pont)

a, Ha egy halmaznak az *a* szám eleme, akkor eleme lesz $\frac{1}{a};-a;-\frac{1}{a}$ is. Ez négy elemet jelent, kivéve azt az esetet, ha $a=1$ vagy ha $a=-1$. Ekkor csak ez két szám szerepel a halmaz elemei között.

(4 pont)

Viszont mindegyik esetben páros elemszámú halmazt kapunk, ami azt jelenti, hogy nem lehet a halmaz elemeinek száma 13.

(2 pont)

b, Az elemek száma 14 lehet. Azt megfigyelhetjük, hogy az 1 eleme lesz a halmaznak. Erre a halmazra végtelen sok eset közül egy példa: $A=\left\{1;-1;2;-2;\frac{1}{2};-\frac{1}{2};3;-3;\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right\}$

(6 pont)

Összesen: 14 pont

2. **Egy háromszög oldalainak hossza egymást követő páros számok. Legalább mekkora ennek a háromszögnek a kerülete?**

(14 pont)

Megoldás:
Jelölje a háromszög oldalainak hosszát: $2n-2;2n;2n+2$, ahol $n\geq 2$ pozitív egész szám.
Ennek a háromszögnek a leghosszabb oldala a háromszög-egyenlőtlenség miatt kisebb, mint a másik kettő összege.

(5 pont)

Eszerint:

$$2n-2+2n>2n+2$$

azaz

$$n>2$$

Ennek megfelelő legkisebb egész szám az $n=3$, így a megfelelő legkisebb kerületű háromszög $4+6+8=18$egység kerületű lesz.

(9 pont)

Összesen: 14 pont

3. Két város között vagy vonattal, vagy busszal lehet közlekedni. A vonat sebessége oda-vissza 90 km/h, míg a busz egyik irányban 80 km/h-val, visszafelé pedig 100 km/h-val képes haladni. Melyik közlekedési eszközzel járhatjuk be rövidebb idő alatt az oda-vissza utat?

(16 pont)

Megoldás:

A két város távolsága legyen s.

(2 pont)

A vonat menetidejére teljesül, hogy $t_1=\frac{2s}{90}=\frac{1}{45}s$.

(5 pont)

A busz esetében a menetidő: $t_2=\frac{s}{80}+\frac{s}{100}=\frac{9}{400}s$

(5 pont)

Mivel $\frac{1}{45}<\frac{9}{400}$, ezért a busz menetideje nagyobb lesz, mint a vonaté.

(4 pont)

Összesen: 16 pont

4. Egy felmérésben két alkalommal lehetett részt venni (mindenki csak egy felmérésben vehetett részt). Az első alkalommal a résztvevők átlagpontszáma 35, a második alkalommal 50 pont volt, míg a teljes felmérésben részt vettek átlagpontszáma 40 pontnak bizonyult. Hányan vettek részt a felmérésben, ha az első alkalommal 25-tel többen voltak, mint a másodikban?

(18 pont)

Megoldás:

Jelölje a második felmérésben résztvevők számát x.
A feltételek miatt így az első felmérésben $x+25$ személy vett részt.

(2 pont)

Ennek megfelelően a résztvevők összpontszámára felírható a következő egyenlet:

$$35(x+25)+50x=40(2x+25)$$

(7 pont)

Ezt megoldva: $x=25$ adódik.
Tehát felmérésben összesen $50+25=75$-en vettek részt.

(7 pont)

A megoldás helyességét az ellenőrzés igazolja.

(2 pont)
Összesen: 18 pont

5. **Mennyi az $x+y$ összeg minimuma, ha $x^2+4x+8=4-|y-1|$?**

(18 pont)

Megoldás:
Rendezzük át az egyenletet a következő alakra:

$$x^2+4x+4+|y-1|=0$$

(5 pont)

Az első három tag teljes négyzet:

$$(x+2)^2+|y-1|=0$$

(5 pont)

Mivel $(x+2)^2 \geq 0$ és $|y-1| \geq 0$, ezért az egyenlet csak egy esetben teljesülhet, ha $x=-2$ és $y=1$.

(5 pont)

Ennek megfelelően az $x+y=-1$ lehet csak, ami egyben a minimuma is.

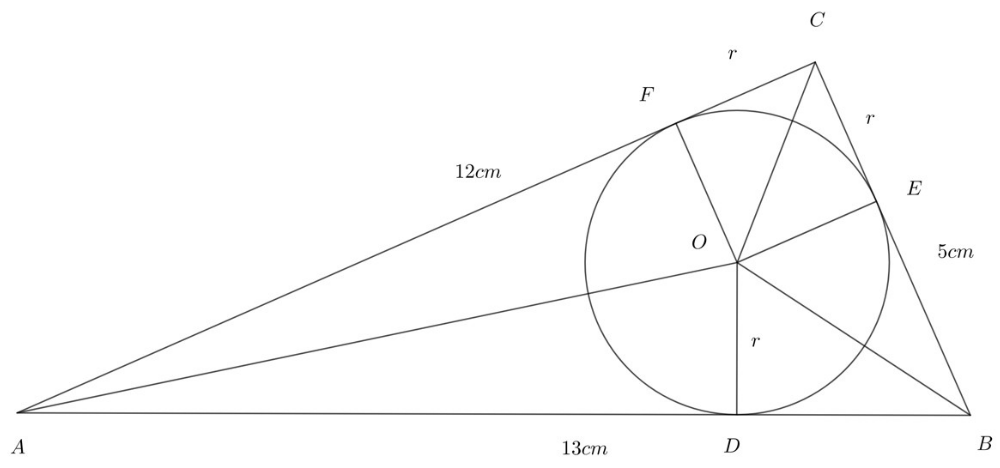
(3 pont)
Összesen: 18 pont

6. **Egy *ABC* háromszög oldalainak hossza 5 cm, 12 cm és 13 cm. Megrajzoltuk az *O* középpontú beírható körét. Határozzuk meg az *AO*, *BO* és *CO* szakaszok hosszát!**

(20 pont)

Megoldás:

Készítsünk ábrát, és használjuk a jelöléseit!



(4 pont)

A háromszög oldalainak hosszára $5^2+12^2=13^2$ ezért *ABC* derékszögű.

(4 pont)

A beírható kör sugara a terület alapján meghatározható:

$$\frac{12\cdot 5}{2}=\frac{r\cdot(5+12+13)}{2}$$

mely alapján $r=2\,cm$ adódik.

(4 pont)

A körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőségét és a sugár hosszát felhasználva az *AOD*, *BOD* és *COD* derékszögű háromszögek alapján a keresett szakaszok hossza:

$$AO=\sqrt{10^2+2^2}=\sqrt{104}\approx 10{,}2\,cm$$
$$BO=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}\approx 3{,}61\,cm$$
$$CO=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}\approx 2{,}83\,cm$$

(8 pont)

Összesen: 20 pont

(10. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. Melyik az a két természetes szám, amelyeknek a számtani közepe és a különbsége is 2024?

(14 pont)

Megoldás:

Jelölje a két számot *x* és *y*. A feltételek alapján:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 2024 \\ x - y = 2024 \end{cases}$$

(5 pont)

Az egyenletrendszert megoldva:

$x = 3036$

$y = 1012$

adódik.

(6 pont)

Így a keresett két természetes szám 3036 és 1012 lesz, melyet az ellenőrzés igazol.

(3 pont)

Összesen: 14 pont

2. Egy diszkoszvető versenyen az indulók 40%-a teljesítette a döntőbe jutás szintjét. Ha 7-tel kevesebben teljesítették volna a szintet, akkor 4-szer annyi kieső lett volna, mint ahány döntőbe jutó. Hányan indultak a versenyen?

(14 pont)

Megoldás:

A résztvevők száma legyen *x*. Az első esetben a szintet teljesítők száma $0{,}4x$, míg a kiesők száma $0{,}6x$ lesz.

(2 pont)

A második esetben a továbbjutók száma $0{,}4x - 7$, a kiesők száma pedig $0{,}6x + 7$ lesz.

A feltételek alapján a felírható egyenlet:

(4 pont)

Az egyenletet megoldva $x = 35$ adódik.

(6 pont)

Tehát a versenyen 35 induló volt, melyet az ellenőrzés is igazol.

(2 pont)

Összesen: 14 pont

3. **Két számról tudjuk, ha az első négyzetéhez hozzáadjuk a második négyzetgyökét, akkor az első szám kétszeresénél 1-gyel kisebb számot kapunk. Melyek ezek a számok?**

(16 pont)

<u>*Megoldás:*</u>

Jelölje a két számot x és y, ahol a négyzetgyökvonás miatt az $y \geq 0$ feltételnek is teljesülnie kell.

(2 pont)

A feltételek miatt:

$x^2 + \sqrt{y} = 2x - 1$

(3 pont)

Ezt átrendezve

$x^2 - 2x + 1 + \sqrt{y} = 0$

adódik, ahol az első három tag teljes négyzet.

(3 pont)

Így:

$(x-1)^2 + \sqrt{y} = 0$

(4 pont)

Mivel $(x-1)^2 \geq 0$ és $\sqrt{y} \geq 0$, így az egyenlőség csak az $x = 1$ és $y = 0$ esetben teljesülhet, melyet az ellenőrzés igazol.

(4 pont)

Összesen: 16 pont

4. **Egy háromszög oldalainak hossza egymást követő páros számok, egy téglalap oldalainak hossza pedig a közéjük eső páratlan számok. A téglalap kerülete 8 cm-el nagyobb, mint a háromszög kerülete. Mekkora ebben az esetben a két síkidom területének különbsége?**

(18 pont)

<u>*Megoldás:*</u>

Jelölje a háromszög oldalainak hosszát , a téglalap oldalainak hosszát pedig .

(3 pont)

Így a téglalap és a háromszög kerületének különbsége alapján:

amiből $n = 4$ adódik. A háromszög oldalainak hossza 6 cm, 8 cm és 10 cm, míg a téglalap oldalai 7 cm és 9 cm lesznek.

(7 pont)

Vegyük észre, hogy a háromszög oldalainak hossza pitagoraszi számhármas, így az derékszögű lesz.

(4 pont)

Így a területek különbsége: $9 \cdot 7 - \frac{6 \cdot 8}{2} = 39$ cm^2 lesz.

(4 pont)

Összesen: 18 pont

5. Egy matematika versenyen 20 kérdésből álló teszt feladatsort kell megoldani. Minden helyes válasz 5-5 pontot ér, viszont minden rossz válasz esetén 2-2 pontot levonnak. Ha egy kérdésre nincs válasz, akkor arra 0 pont jár. Legalább hány kérdésre nem válaszolt az a versenyző, akinek 48 pontja lett?

(18 pont)

Megoldás:
A jó válaszok számát *x*, a rossz válaszokét jelölje *y,* és *z* legyen a meg nem válaszolt kérdések száma.

(2 pont)

Az elért pontszám alapján

$5x - 2y = 48$

egyenlet megoldását keressük a természetes számok halmazán.

(4 pont)

Az egyenletből:
$y = \frac{5x - 48}{2} = 2x - 24 + \frac{x}{2}$
azaz $x = 2k$ páros szám lehet csak.

(4 pont)

Figyelembe véve, hogy $z = 20 - x - y$ is csak nemnegatív egész lehet, és $y = 5k - 24$ így *k* értéke csak kétféle lehet:
$k = 5$ esetén $x = 10; y = 1; z = 9$.
$k = 6$ esetén $x = 12; y = 6; z = 2$.

(6 pont)

Ez azt jelenti, hogy legalább 2 kérdésre nem adott választ a versenyen induló.

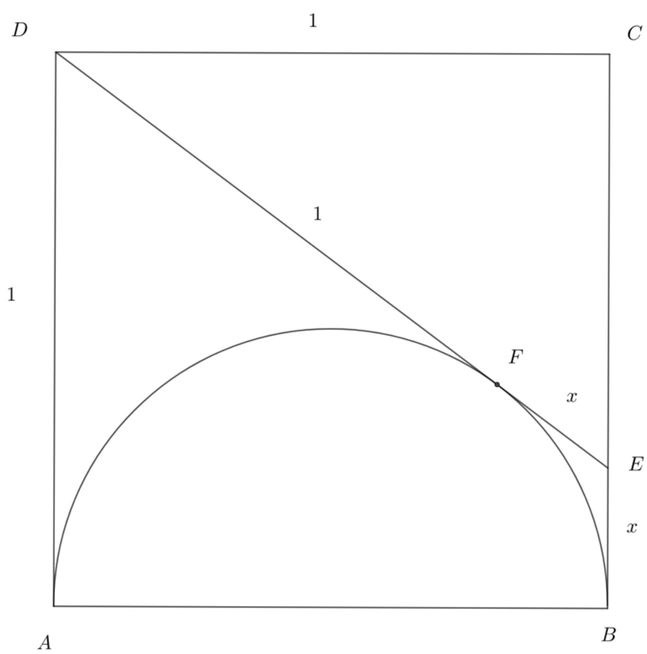
(2 pont)

Összesen: 18 pont

6. Egy egységnyi oldalú *ABCD* négyzet *AB* oldalára a négyzetbe befelé egy *AB* átmérőjű félkört szerkesztünk. A *D* csúcsból a félkörhöz húzott érintő a *BC* oldalt *E* pontban metszi. Mekkora a keletkező *DEC* háromszög területe?

(20 pont)

Megoldás:
Használjuk az alábbi ábra jelöléseit.
Jelölje *x* az *EF* érintő szakasz hosszát!



(3 pont)

Teljesül, hogy $DA = DF = DC = 1$, valamint $EF = EB = x$.

(6 pont)

A *DEC* derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$1 + 1 - x \quad = 1 + x$$

melynek megoldása $x = \frac{1}{4}$.

(7 pont)

3

3

Így a *DEC* háromszög oldalainak hossza: lesz. A területe pedig területegység.

(4 pont)

Összesen: 20 pont