(9. osztály)

1. Egy számhalmaz elemeire igaz, hogy bármely elemének reciproka is és az ellentettje is eleme a halmaznak.

   a. Lehet-e a halmaz elemeinek száma 13? Ha igen, akkor adjunk meg egy ilyen halmazt!

   b. Lehet-e a halmaz eleminek száma 14? Ha igen, akkor adjunk meg egy ilyen halmazt!

(14 pont)

2. Egy háromszög oldalainak hossza egymást követő páros számok. Legalább mekkora ennek a háromszögnek a kerülete?

(14 pont)

3. Két város között vagy vonattal, vagy busszal lehet közlekedni. A vonat sebessége oda-vissza 90 km/h, míg a busz egyik irányban 80 km/h-val, visszafelé pedig 100 km/h-val képes haladni. Melyik közlekedési eszközzel járhatjuk be rövidebb idő alatt az oda-vissza utat?

(16 pont)

4. 10 dobozban néhány cukorka van. Sorba rakva őket, mindegyikben 1-gyel több van, mint az előzőben. Át lehet-e pakolni a cukorkákat úgy, hogy mindegyik dobozban ugyanannyi legyen?

(16 pont)

5. Az *ABCD* téglalap *CD* oldalán adott *E*, az *AD* oldalán pedig *F* pont úgy, hogy az $EC = \mathbf{10}\ cm, AF = 6\ cm$. Az *EFB* háromszög területe 50 cm^2. Mekkora az *ABCD* téglalap területe?

(20 pont)

6. Adjuk meg 2023 legkisebb olyan többszörösét, amely 2024-re végződik!

(20 pont)

(10. osztály)

1. Melyik az a két természetes szám, amelyeknek a számtani közepe és a különbsége is 2024?

   (14 pont)

2. Egy diszkoszvető versenyen az indulók 40%-a teljesítette a döntőbe jutás szintjét. Ha 7-tel kevesebben teljesítették volna a szintet, akkor 4-szer annyi kieső lett volna, mint ahány döntőbe jutó. Hányan indultak a versenyen?

   (14 pont)

3. Két számról tudjuk, ha az első négyzetéhez hozzáadjuk a második négyzetgyökét, akkor az első szám kétszeresénél 1-gyel kisebb számot kapunk. Melyek ezek a számok?

   (16 pont)

4. Egy kör alakú asztalnál 7-en ülnek. Mindenki gondol egy egész számra, majd mindenki felírja egy cédulára két szomszédja számának összegét. Lehetséges-e, hogy minden cédulán 2023 álljon?

   (18 pont)

5. Egy társasjáték készletében olyan kockák vannak, melyek piros és kék oldalakkal rendelkeznek. Hány kockából áll a készlet, ha az összes lehetséges színezés előfordul? (Két kockát akkor tekintünk különbözőnek, ha azok forgatással egymásba nem vihetők)

   (18 pont)

6. Az ABC egyenlő szárú háromszögben a szárak által bezárt C csúcsban található szög 20°-os. Az AC száron található D pontra $DC = AB$. Határozzuk meg az $ADB\measuredangle$-et!

   (20 pont)

(9. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. **Egy számhalmaz elemeire igaz, hogy bármely elemének reciproka is és az ellentettje is eleme a halmaznak.**
   a. **Lehet-e a halmaz elemeinek száma 13? Ha igen, akkor adjunk meg egy ilyen halmazt!**
   b. **Lehet-e a halmaz eleminek száma 14? Ha igen, akkor adjunk meg egy ilyen halmazt!**

(14 pont)

<u>*Megoldás:*</u>
A halmaz elemei között nem szerepelhet a 0, hiszen ennek a reciproka nem értelmezhető.

(2 pont)

a, Ha egy halmaznak az a szám eleme, akkor eleme lesz $\frac{1}{a}; -a; -\frac{1}{a}$ is. Ez négy elemet jelent, kivéve azt az esetet, ha $a=1$ vagy ha $a=-1$. Ekkor csak ez két szám szerepel a halmaz elemei között.

(4 pont)

Viszont mindegyik esetben páros elemszámú halmazt kapunk, ami azt jelenti, hogy nem lehet a halmaz elemeinek száma 13.

(2 pont)

b, Az elemek száma 14 lehet. Azt megfigyelhetjük, hogy az 1 eleme lesz a halmaznak. Erre a halmazra végtelen sok eset közül egy példa: $A=\left\{1;-1;2;-2;\frac{1}{2};-\frac{1}{2};3;-3;\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right\}$

(6 pont)

Összesen: 14 pont

2. **Egy háromszög oldalainak hossza egymást követő páros számok. Legalább mekkora ennek a háromszögnek a kerülete?**

(14 pont)

<u>*Megoldás:*</u>
Jelölje a háromszög oldalainak hosszát: $2n-2; 2n; 2n+2$, ahol $n \geq 2$ pozitív egész szám. Ennek a háromszögnek a leghosszabb oldala a háromszög-egyenlőtlenség miatt kisebb, mint a másik kettő összege.

(5 pont)

Eszerint:

$$2n-2+2n>2n+2$$

azaz

$$n>2$$

Ennek megfelelő legkisebb egész szám az $n=3$, így a megfelelő legkisebb kerületű háromszög $4+6+8=18$egység kerületű lesz.

(9 pont)

Összesen: 14 pont

3. **Két város között vagy vonattal, vagy busszal lehet közlekedni. A vonat sebessége oda-vissza 90 km/h, míg a busz egyik irányban 80 km/h-val, visszafelé pedig 100 km/h-val képes haladni. Melyik közlekedési eszközzel járhatjuk be rövidebb idő alatt az oda-vissza utat?**

(16 pont)

Megoldás:

A két város távolsága legyen s.

(2 pont)

A vonat menetidejére teljesül, hogy $t_1=\frac{2s}{90}=\frac{1}{45}s$.

(5 pont)

A busz esetében a menetidő: $t_2=\frac{s}{80}+\frac{s}{100}=\frac{9}{400}s$

(5 pont)

Mivel $\frac{1}{45}<\frac{9}{400}$, ezért a busz menetideje nagyobb lesz, mint a vonaté.

(4 pont)

Összesen: 16 pont

4. **10 dobozban néhány cukorka van. Sorba rakva őket, mindegyikben 1-gyel több van, mint az előzőben. Át lehet-e pakolni a cukorkákat úgy, hogy mindegyik dobozban ugyanannyi legyen?**

(16 pont)

Megoldás:

Jelöljük az egyes dobozokban levő cukorkák számát növekvő sorrendben a következő módon: $n-4;n-3;\ldots;n;n+1;n+2;\ldots;n+5$

(4 pont)

Ezek számának összege: $10n+5$ lesz, ami páratlan szám.

(5 pont)

Ha mindegyik dobozban ugyanannyi k db cukorka lenne, akkor ezek száma összesen $10k$ lenne, ami viszont páros szám.

(4 pont)

Így a megfelelő átpakolás semmiképpen nem érhető el.

(3 pont)

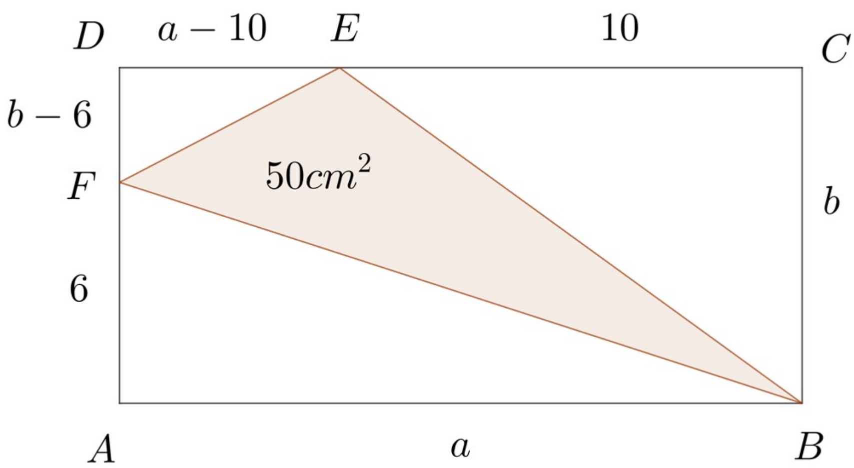
Összesen: 16 pont

5. **Az *ABCD* téglalap *CD* oldalán adott *E*, az *AD* oldalán pedig *F* pont úgy, hogy az $EC=10\,cm$, $AF=6\,cm$. Az *EFB* háromszög területe 50 cm². Mekkora az *ABCD* téglalap területe?**

(20 pont)

<u>*Megoldás:*</u>

Jelölje a téglalap oldalainak hosszát *a* és *b*, majd használjuk az ábra jelöléseit.



(3 pont)

Az ABCD téglalap területe: $T=ab$

(2 pont)

Másrészt a részek összegeként:

$$T=50+5b+3a+\frac{(a-10)(b-6)}{2}$$

(5 pont)

A kétféleképpen felírt területet egyenlővé téve, majd átrendezve adódik, hogy:

$$ab=160$$

(8 pont)

Ez éppen a téglalap területe, amely ezek szerint $160\,cm^2$ lesz.

(2 pont)

Összesen: 20 pont

6. **Adjuk meg 2023 legkisebb olyan többszörösét, amely 2024-re végződik!**

(20 pont)

<u>*Megoldás:*</u>

Ahhoz, hogy a 2023 többszöröse 4-re végződjön a szorzónak 8-ra kell végződnie.
Ennek megfelelően szorzást a szokásos módon felírva:
$\underline{2023\cdot\ldots}8$

16184

(6 pont)

A kapott eredmény alapján látható, hogy a 8-as alá 4-nek kerülnie, azaz a szorzó tízes helyiértékén ismét 8-nak kell állnia.

$\underline{2023 \cdot \ldots} 88$

16184

16184

(6 pont)

Hasonlóan folytatva juthatunk el a szorzó meghatározásában a 8088-hoz.

$\underline{2023} \cdot 8088$

16184

16184

0000

16184___

16362024

(6 pont)

Így a 2023 legkisebb többszöröse, amely 2024-re végződik a 16362024 lesz.

(2 pont)

Összesen: 20 pont

(10. osztály)

Megjegyzés: Természetesen az egyes feladatokra más megoldások is elképzelhetők, ezekre értelemszerűen a megfelelő pontszám jár!

1. Melyik az a két természetes szám, amelyeknek a számtani közepe és a különbsége is 2024?

(14 pont)

Megoldás:

Jelölje a két számot x és y. A feltételek alapján:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2}=2024 \\ x-y=2024 \end{cases}$$

(5 pont)

Az egyenletrendszert megoldva:

$$x=3036$$
$$y=1012$$

adódik.

(6 pont)

Így a keresett két természetes szám 3036 és 1012 lesz, melyet az ellenőrzés igazol.

(3 pont)

Összesen: 14 pont

2. Egy diszkoszvető versenyen az indulók 40%-a teljesítette a döntőbe jutás szintjét. Ha 7-tel kevesebben teljesítették volna a szintet, akkor 4-szer annyi kieső lett volna, mint ahány döntőbe jutó. Hányan indultak a versenyen?

(14 pont)

Megoldás:

A résztvevők száma legyen x. Az első esetben a szintet teljesítők száma $0{,}4x$, míg a kiesők száma $0{,}6x$ lesz.

(2 pont)

A második esetben a továbbjutók száma $0{,}4x-7$, a kiesők száma pedig $0{,}6x+7$ lesz.

A feltételek alapján a felírható egyenlet:

$$4(0{,}4x-7)=0{,}6x+7$$

(4 pont)

Az egyenletet megoldva $x=35$ adódik.

(6 pont)

Tehát a versenyen 35 induló volt, melyet az ellenőrzés is igazol.

(2 pont)

Összesen: 14 pont

3. Két számról tudjuk, ha az első négyzetéhez hozzáadjuk a második négyzetgyökét, akkor az első szám kétszeresénél 1-gyel kisebb számot kapunk. Melyek ezek a számok?

(16 pont)

Megoldás:

Jelölje a két számot x és y, ahol a négyzetgyökvonás miatt az $y \geq 0$ feltételnek is teljesülnie kell.

(2 pont)

A feltételek miatt:

$$x^2 + \sqrt{y} = 2x - 1$$

(3 pont)

Ezt átrendezve

$$x^2 - 2x + 1 + \sqrt{y} = 0$$

adódik, ahol az első három tag teljes négyzet.

(3 pont)

Így:

$$(x-1)^2 + \sqrt{y} = 0$$

(4 pont)

Mivel $(x-1)^2 \geq 0$ és $\sqrt{y} \geq 0$, így az egyenlőség csak az $x=1$ és $y=0$ esetben teljesülhet, melyet az ellenőrzés igazol.

(4 pont)

Összesen: 16 pont

4. Egy kör alakú asztalnál 7-en ülnek. Mindenki gondol egy egész számra, majd mindenki felírja egy cédulára két szomszédja számának összegét. Lehetséges-e, hogy minden cédulán 2023 álljon?

(18 pont)

Megoldás:

Mivel mindenkinek két szomszédja van, így minden gondolt számot kétszer vesznek figyelembe. Ez azt jelenti, hogy ezek összege biztosan páros lesz.

(7 pont)

Ha minden cédulán 2023 szerepelne, akkor ezek összege $7 \cdot 2023 = 14161$ lenne, ami páratlan.

(7 pont)

Ez ellentmond annak, hogy az összeg páros. Azaz nem lehetséges, hogy minden cédulán 2023 álljon.

(4 pont)

Összesen: 18 pont

5. Egy társasjáték készletében olyan kockák vannak, melyek piros és kék oldalakkal rendelkeznek. Hány kockából áll a készlet, ha az összes lehetséges színezés

előfordul? (Két kockát akkor tekintünk különbözőnek, ha azok forgatással egymásba nem vihetők)

(18 pont)

Megoldás:
Jelölje a piros lapok számát p a kék lapok számát k. Számoljuk az eseteket a p lehetséges értékeit figyelembe véve.
Ha $p=0$, akkor 1 eset van, hasonlóan a $k=0$ esethez. Ez összesen 2 kocka.

(3 pont)

Ha $p=1$, akkor 1 eset van, hasonlóan a $k=1$ esethez. Ez is összesen 2 kocka.

(4 pont)

Ha $p=2$, akkor 2 eset van, hasonlóan a $k=2$ esethez. A piros lapok lehetnek egymással szemben, vagy szomszédosak. Ez összesen 4 kocka.

(4 pont)

Ha $p=3$, akkor a három piros lap kapcsolódhat egy sarokban ez 1 eset. Ha van 2 piros lap egymással szemben az 1 újabb esetet teremt. Így összesen 2 kocka van. Itt nem kell számolnunk a $k=3$ feltétellel, hiszen az a $p=3$ esettel megegyezik.

(4 pont)

Így a készletben található különböző kockák száma 10 lesz.

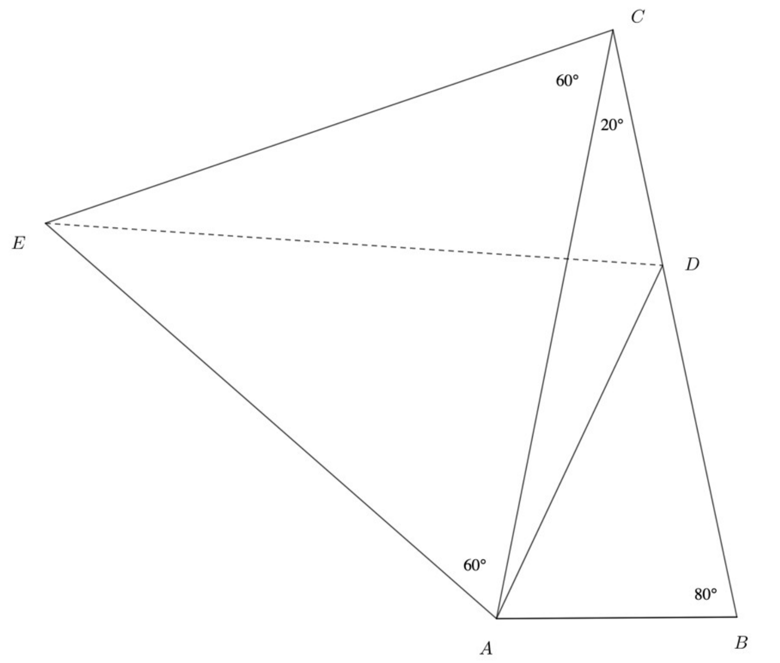
(3 pont)

Összesen: 18 pont

6. **Az *ABC* egyenlő szárú háromszögben a szárak által bezárt *C* csúcsban található szög 20°-os. Az *AC* száron található *D* pontra $DC=AB$. Határozzuk meg az $ADB\measuredangle$-et!**

(20 pont)

Megoldás:
Rajzoljuk az adott *ABC* háromszögre az *AC* oldalra kifelé egy szabályos *ACE* háromszöget az ábrának megfelelően.



(4 pont)

Mivel $ABC\measuredangle = BCD\measuredangle = 80°$, és $AB = DC, BC = CE$ egyenlőségeket figyelembe véve megállapítható, hogy az EDC háromszög és az ABC háromszögek egybevágóak, mert két oldaluk és a közbezárt szögük egyenlő.

(5 pont)

Így az EDC háromszög és az ADC háromszög is egyenlő szárú, ahol $EDC\sphericalangle = 80°$.

(5 pont)

Mivel az ADE egyenlő szárú háromszögben a szárak által bezárt szög $AED\measuredangle = 40°$, így az alapon levő szög nagysága $EDA\measuredangle = 70°$.

(4 pont)

A keresett szög nagysága így: $ADB\measuredangle = 180° - 80° - 70° = 30°$.

(2 pont)

Összesen: 20 pont