11. évfolyam szakgimnázium, I. forduló

1. Az elmúlt négy hónapban többször változtatták a benzin árát. Az első hónapban 3%-kal, a másodikban 7%-kal, a harmadikban 5%-kal nőtt átlagosan a benzin ára. Hány százalékkal változott átlagosan a benzin ára a negyedik hónapban egész %-ra kerekítve, ha ebben a hónapban a benzin ára az első havi kezdeti ár egytizedével növekedett?

2. Egy húrtrapéz alapjainak aránya 2 : 3. Középvonalának hossza 15 cm, átlói merőlegesek egymásra. Hány centiméter, illetve négyzetcentiméter a trapéz kerülete, illetve területe?

3. Egy szakgimnázium 11. évfolyamára járó diákok három szabadidős programból választhatnak. Vizisportokra 37-en, sakkozásra 34-en és társastáncra 39-en jelentkeztek, 16 tanuló nem választotta egyiket sem. A pontosan egy programot választók száma 11-szerese, a pontosan két programot választók száma 4-szerese a három programot választók számának.
   a) Hányan választottak legalább két programot?
   b) Hány tanuló jár a 11. évfolyamra?

4. Jelölje A a $-x^2+2x+24 \geq 0$ egyenlőtlenség, illetve B az $\big||x-4|-5\big| < 3$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát a valós számok halmazán.
   a) Mely egész számok tartoznak az A halmazhoz?
   b) Határozzuk meg az $A \cap B$ *és az* $A \setminus B$ halmazokat.

5. Hány négyjegyű számot készíthetünk a páros számjegyek felhasználásával, ha a számjegyek nem ismétlődhetnek?
   a) Mennyivel egyenlő a fenti négyjegyű számok összege?
   b) Hány 12-vel osztható szám van a fenti négyjegyű számok között?

6. Egy deltoid két szemközti szöge derékszög. A derékszöget bezáró oldalak hossza *a* és *b,* a deltoid beírt körének sugarát jelölje *r*. Bizonyítsuk be, hogy
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

11. évfolyam szakgimnázium, I. forduló

pontozási útmutató

1. Az elmúlt négy hónapban többször változtatták a benzin árát. Az első hónapban 3%-kal, a másodikban 7%-kal, a harmadikban 5%-kal nőtt átlagosan a benzin ára. Hány százalékkal változott átlagosan a benzin ára a negyedik hónapban egész %-ra kerekítve, ha ebben a hónapban a benzin ára az első havi kezdeti ár egytizedével növekedett?

Megoldás:

A kezdeti benzin árat jelöljük A-val, akkor a hónap végén az új ár $A_1 = 1{,}03 \cdot A$. (2 pont)
A 2. hónap végén a benzin ára $A_2 = 1{,}07 \cdot A_1 = 1{,}07 \cdot 1{,}03 \cdot A$ (2 pont)
A 3. hónap végén a benzin ára $A_3 = 1{,}05 \cdot A_2 = 1{,}05 \cdot 1{,}07 \cdot 1{,}03 \cdot A \approx 1{,}157A$ (1 pont)
A 4. hónapban a benzin ára $0{,}1A$-val nőtt. A 4. hónapi ár az eredeti ár $1{,}257$-szorosa lett. A 4. havi átlagos áremelés %-át jelölje p, így a 4. hónap végén a benzin ára:

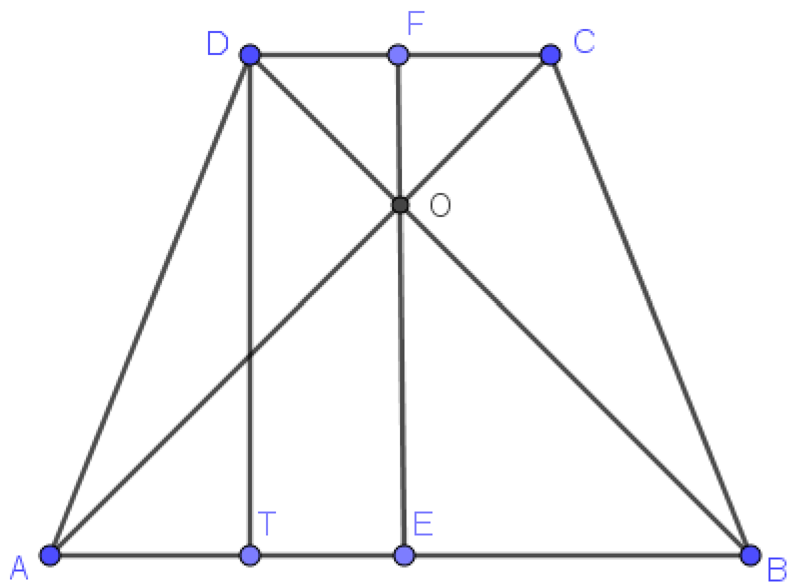
$$1{,}257A = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot A_3 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot 1{,}157A. \qquad \text{(2 pont)}$$

Innen $\left(1 + \frac{p}{100}\right) \approx 1{,}086$, ahonnan $p \approx 8{,}6$. (2 pont)
Tehát a negyedik havi átlagos árváltozás egészre kerekített értéke 9%. (1 pont)
Összesen: 10 pont

2. Egy húrtrapéz alapjainak aránya 2 : 3. Középvonalának hossza 15 cm, átlói merőlegesek egymásra. Hány centiméter, illetve négyzetcentiméter a trapéz kerülete, illetve területe?

Megoldás:

Készítsünk ábrát, és használjuk annak a jelöléseit.



A feladat feltételei alapján $DC: AB = 2:3$ és -t$(DC + AB): 2 = 15\ cm$. (1 pont)
Az egyenletrendszer megoldásai: $AB = 18\ cm, DC = 12\ cm$. (2 pont)
Az *ABO*, *OCD* egyenlőszárú derékszögű háromszögek, melyekben *OE* és *OF* az átfogókhoz tartozó magasságok, így

$$OE = 9\ cm, OF = 6\ cm.$$ (2 pont)

A trapéz magassága: $m = OE + OF = 9 + 6 = 15\ cm$. (1 pont)
A trapéz területe: $T = \frac{AB+DC}{2} \cdot m = \frac{18+12}{2} \cdot 15 = 225\ cm^2$. (1 pont)

$$AT = \frac{AB-DC}{2} = 3\ cm.$$ (1 pont)

A trapéz szárai egyenlő hosszúak és pl. *AD*-t Pitagorasz-tétellel számítjuk:
$AD = \sqrt{AT^2 + TD^2} = \sqrt{234}\ cm$. (1 pont)
A trapéz kerülete: $K = \left(30 + 2\sqrt{234}\right)\ cm$. (1 pont)
Összesen: 10 pont

3. Egy szakgimnázium 11. évfolyamára járó diákok három szabadidős programból választhatnak. Vizisportokra 37-en, sakkozásra 34-en és társastáncra 39-en jelentkeztek, 16 tanuló nem választotta egyiket sem. A pontosan egy programot választók száma 11-szerese, a pontosan két programot választók száma 4-szerese a három programot választók számának.
   a) Hányan választottak legalább két programot?
   b) Hány tanuló jár a 11. évfolyamra?

Megoldás:

A három programot választók számát jelölje *x*. (1 pont)
A logikai szita szerint $37 + 34 + 39 = 11x + 2 \cdot 4x + 3 \cdot x$. (3 pont)
A fenti egyenletben a 2-es, illetve a 3-as szorzók azt jelentik, hogy a két programot választókat kétszer, illetve a három programot választókat háromszor, számoltuk össze. (2 pont)
A fenti egyenletet rendezve $110 = 22x$, a megoldás $x = 5$. (1 pont)
a) A legalább két programot választók száma: $4x + x = 25$. (2 pont)
b) Az évfolyam létszáma: $11 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 5 + 16 = 96$. (1 pont)
Összesen: 10 pont

4. Jelölje A a $-x^2 + 2x + 24 \geq 0$ egyenlőtlenség, illetve B az $\left||x-4| - 5\right| < 3$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát a valós számok halmazán.
   a) Mely egész számok tartoznak az A halmazhoz?
   b) Határozzuk meg az $A \cap B$ és az $A \setminus B$ halmazokat.

Megoldás:

Mivel az $-x^2 + 2x + 24$ polinom gyökei $x_1 = -4, x_2 = 6$ és a másodfokú tag együtthatója negatív, ezért az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $A = [-4; 6]$. (2 pont)
A második egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $-3 < |x-4| - 5 < 3$. (1 pont)
Rendezve $2 < |x-4| < 8$, ami a következőképpen írható
$2 < |x-4|$ és $|x-4| < 8$. (1 pont)

Az első egyenlőtlenség megoldáshalmaza $x < 2$ vagy $x > 6$. (1 pont)
A második egyenlőtlenség megoldáshalmaza $-4 < x < 12$. (1 pont)
A két megoldáshalmaz metszete: $B =]-4; 2[\cup]6; 12[$. (1 pont)

a) Az A halmazhoz tartozó egész számok: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. (1 pont)

b) $A \cap B =]-4; 2[$, $A \setminus B = [2; 6]$. (2 pont)

Összesen: 10 pont

5. Hány négyjegyű számot készíthetünk a páros számjegyek felhasználásával, ha a számjegyek nem ismétlődhetnek?
   a) Mennyivel egyenlő a fenti négyjegyű számok összege?
   b) Hány 12-vel osztható szám van a fenti négyjegyű számok között?

Megoldás:

a) Az ezres helyi értékre négy számjegyből választhatunk (a nullát nem). (1 pont)
A százas helyi értékre négy, a tízes helyi értékre három és az egyes helyi értékre két számjegyből választhatunk. (1 pont)
A keresett négyjegyű számok száma: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$. (1 pont)
Az ezres helyi értéken a négy számjegy mindegyike 24-szer szerepel, további helyi értékeken 18-szor, a nulla pedig 24-szer. (2 pont)
Így a megfelelő négyjegyű számok összege:
$$(24 \cdot 10^3 + 18 \cdot 10^2 + 18 \cdot 10 + 18) \cdot (8 + 6 + 4 + 2) = 519960.$$ (2 pont)

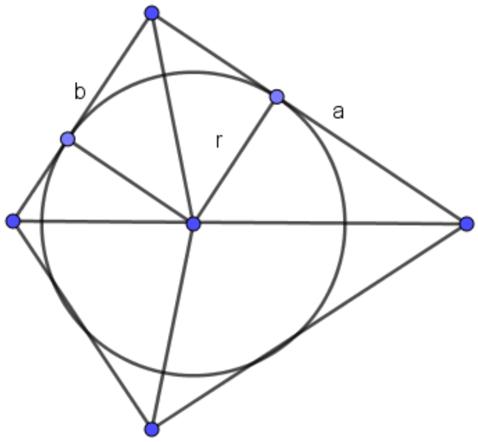
b) A néggyel és hárommal való oszthatóságot felhasználva az utolsó két számjegy mellett zárójelben az összes ilyen 12-vel osztható számok számát írtuk: 20(2), 40(4), 60(4), 80(2), 24(1), 48(1), 64(2), 68(1), 84(1), ami 18. (3 pont)

Összesen: 10 pont

6. Egy deltoid két szemközti szöge derékszög. A derékszöget bezáró oldalak hossza *a* és *b*, a deltoid beírt körének sugarát jelölje *r*. Bizonyítsuk be, hogy
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Megoldás:

Készítsünk ábrát, és használjuk annak jelöléseit.



A beírt kör középpontját a deltoid csúcsaival összekötve azt négy olyan háromszögre bontjuk, melyek egy oldala a, illetve b és az ezekhez tartozó magasság r (a beírt kör sugara). (3 pont)

Írjuk fel a deltoid területét ennek a négy háromszögnek a területösszegeként

$$T = 2 \cdot \frac{a \cdot r}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot r}{2} = (a + b) \cdot r.$$ (2 pont)

Írjuk fel a deltoid területét két a, b befogójú derékszögű háromszög területösszegeként

$$T = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = a \cdot b.$$ (2 pont)

Így

$$a \cdot b = (a + b) \cdot r.$$ (1 pont)

Az egyenlet mindkét oldalát osztva $a \cdot b \cdot r$-rel, a bizonyítandó

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

egyenlőséget kapjuk. (2 pont)

Összesen: **10 pont**

12. évfolyam szakgimnázium, I. forduló

1. Hány oldalú az a szabályos sokszög, melynek 117-tel több átója van, mint oldala? Számítsuk ki a sokszög területét, ha az oldala 12 cm hosszúságú!

2. Mely valós számokra értelmezhető a következő kifejezés:
$$lg(x^2 - x - 6) + lg(16 - x^2) \text{ ?}$$

3. Lali leírta egy lapra azokat a háromjegyű természetes számokat, melyek hárommal osztva kettő maradékot adnak. A leírt számok közül Lili letörölt kettőt, így a lapon maradt számok átlaga 549,5 lett. Melyik két számot törölte le Lili?

4. Oldjuk meg a racionális számpárok halmazán a következő egyenletet:
$$(x^2 - 4x + 6)(3y^2 - 12y + 17) = 10 \text{ .}$$

5. Lalinak 16 egyforma méretű üveggolyója van, melyek közül 9 piros, 4 fehér, a többi zöld. A golyókat két olyan dobozban tartja, melyek közül az egyikbe 6, a másikba 10 golyó fér. Lili, aki Lali húga egy alkalommal a 16 golyót az összes lehetséges módon elhelyezte a két dobozban és azokat leírta. Hány lehetőséget írt le Lili?

6. Két dobozban 6-6 egyforma golyó van. Az első dobozban lévő golyók 1-től 12-ig a páratlan számokkal, a második dobozban lévő golyók 2-től 12-ig a páros számokkal vannak megszámozva. Minden golyón egy sorszám van. Mindkét urnából kiveszünk *n* darab golyót, és áttesszük a másik dobozba. Legyen P_n annak a valószínűsége, hogy ekkor a golyókra írt számok összege a két dobozban egyenlő! Mennyi P_1 és P_2?

12. évfolyam szakgimnázium, I. forduló

pontozási útmutató

1. Hány oldalú az a szabályos sokszög, melynek 117-tel több átója van, mint oldala? Számítsuk ki a sokszög területét, ha az oldala 12 cm hosszúságú!

Megoldás:

Egy szabályos n oldalú sokszög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$ (1 pont)
A feladat szövege alapján: $\frac{n(n-3)}{2} = n + 117$, ahonnan (2 pont)
$$n^2 - 5n - 234 = 0$$ (1 pont)
Az egyenlet megoldásai: $n_1 = 18,\ n_2 = -13$ (2 pont)
Mivel $n > 0$, ezért csak a 18 a megoldás. (1 pont)
Az egy oldalhoz tartozó középponti szög 20°: (1 pont)
Így a középponti háromszög magassága: $m = 6 \cdot tg80^o \approx 34\ cm$. (1 pont)
A sokszög területe: $T = 18 \cdot \frac{12}{2} \cdot 34 = 3672\ cm^2$. (1 pont)
Összesen: **10 pont**

2. Mely valós számokra értelmezhető a következő kifejezés:
$$lg(x^2 - x - 6) + lg(16 - x^2)\ ?$$

Megoldás:

Logaritmusát a pozitív számoknak értelmeztük, így
$$(x^2 - x - 6) > 0 \text{ és } (16 - x^2) > 0$$ (2 pont)
A másodfokú polinomok gyökei: $x_1 = -2, x_2 = 3;\ x_3 = -4, x_4 = 4$ (2 pont)
Az első egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $x < -2$ vagy $x > 3$. (2 pont)
A második egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $-4 < x < 4$. (2 pont)
A kifejezés értelmezési tartománya a fenti megoldáshalmazok metszete:
$$D =]-4; -2[\cup]3; 4[.$$ (2 pont)
Összesen: **10 pont**

3. Lali leírta egy lapra azokat a háromjegyű természetes számokat, melyek hárommal osztva kettő maradékot adnak. A leírt számok közül Lili letörölt kettőt, így a lapon maradt számok átlaga 549,5 lett. Melyik két számot törölte le Lili?

Megoldás:

Lali által leírt számok olyan számtani sorozat elemei, melynek első eleme a 101, az n-edik eleme a 998. (2 pont)
$998 = 101 + (n-1)3$, ahonnan (1 pont)
$$n = 300.$$ (1 pont)
A 300 háromjegyű szám összege: $S = \frac{101+998}{2} \cdot 300 = 164850$. (2 pont)

Lili elvett két számot, a megmaradt 298 szám átlaga 549,5, így ezek összege:
$298 \cdot 549{,}5 = 163751$. A két összeg különbsége a Lili által elvett két szám összege: 1099. (2 pont)

Mivel 1099 egyenlő számsorozat első és utolsó elemének összegével, így Lili 150 számpárt vehetett el, melyekre teljesül, hogy $a_k + a_{301-k} = 1099,\ k = 1, \dots, 150$. (2 pont)

Összesen: **10 pont**

4. Oldjuk meg a racionális számpárok halmazán a következő egyenletet:
$$(x^2 - 4x + 6)(3y^2 - 12y + 17) = 10\ .$$

Megoldás:

Határozzuk meg a baloldalon álló kifejezések értékkészletét. (1 pont)
$$(x^2 - 4x + 6) = (x-2)^2 + 2 \geq 2 \qquad \text{(2 pont)}$$
$$(3y^2 - 12y + 17) = 3(y^2 - 4y + 4) + 5 = 3(y-2)^2 + 5 \geq 5 \qquad \text{(3 pont)}$$
Az első tényező legalább 2, a második tényező legalább 5, így szorzatuk legalább 10. (2 pont)

A szorzat pontosan akkor 10, ha az első tényező 2, a második tényező 5.
Ami pontosan akkor teljesül, ha $x = 2,\ y = 2$. (2 pont)

Összesen: **10 pont**

5. Lalinak 16 egyforma méretű üveggolyója van, melyek közül 9 piros, 4 fehér, a többi zöld. A golyókat két olyan dobozban tartja, melyek közül az egyikbe 6, a másikba 10 golyó fér. Lili, aki Lali húga egy alkalommal a 16 golyót az összes lehetséges módon elhelyezte a két dobozban és azokat leírta. Hány lehetőséget írt le Lili?

Megoldás:

A zöld golyók száma 3. (1 pont)
Vizsgáljuk a hat golyót tartalmazó dobozban a fehér és zöld golyók számát.
Ha ezek együttes száma kevesebb, mint hat, akkor ezt piros golyókkal pótoljuk.
Ebben a dobozban lévő golyók fajta száma egyértelműen meghatározza a másik dobozban lévő golyók fajta számait. (1 pont)
A fehér golyók száma lehet: 0, 1, 2, 3, 4, ez 5 lehetőség. (2 pont)
A zöld golyók száma lehet: 0, 1, 2, 3, ez 4 lehetőség. (1 pont)
Ez összesen $5 \cdot 4 = 20$ lehetőség. (1 pont)
Ebből a 20 lehetőségből a $4 + 3 = 7$ nem lehet (2 pont)
Tehát Lili összesen 19 elhelyezési lehetőséget írt le. (1 pont)

Összesen: **10 pont**

6. Két dobozban 6-6 egyforma golyó van. Az első dobozban lévő golyók 1-től 12-ig a páratlan számokkal, a második dobozban lévő golyók 2-től 12-ig a páros számokkal vannak megszámozva. Minden golyón egy sorszám van. Mindkét urnából kiveszünk n darab golyót, és áttesszük a másik dobozba. Legyen P_n annak a valószínűsége, hogy ekkor a golyókra írt számok összege a két dobozban egyenlő! Mennyi P_1 és P_2?

Megoldás:

Az 1. dobozban lévő golyók sorszámainak az összege $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$. (1 pont)

A 2. dobozban lévő golyók sorszámainak az összege: $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42$. (1 pont)

A 2. dobozban az összeg 6-tal több, mint az elsőben, tehát az áttevés után az egyenlőség akkor valósul meg, ha mind a kettőben 39 lesz a golyók sorszámainak összege. (2 pont)

Tehát az egyes dobozokból kivett golyók sorszámai különbségének 3-nak kell lennie. (1 pont)

Ez 1-1 kivett golyó esetén megvalósulhat, ha az áttett golyókon lévő számok 1-4, 3-6, 5-8, 7-10 vagy 9-12. Ez 5 eset. (2 pont)

Az összes lehetőség száma $6 \cdot 6 = 36$, tehát $P_1 = \frac{5}{36}$. (1 pont)

2-2 áttett golyó esetén a két-két kivett szám összege páros, ezek különbsége is páros, így a 3 nem állhat elő. (1 pont)

Tehát ez nem valósulhat meg, vagyis $P_2 = 0$. (1 pont)

Összesen: 10 pont