11. évfolyam gimnázium, I. forduló

1. Egy szabályos dobókockával 4-szer dobunk egymás után.
   a) Hányféle dobássorozat jöhet létre?
   b) Hányféle dobássorozat van, melyben a második dobásra, és csak arra, dobunk 3-ast?
   c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első dobás eredménye különbözik a többi dobás eredményétől?

2. Tekintsük az $(p+10)x^2+(2p-4)x+6=0$ másodfokú egyenletet, ahol p valós paraméter; $x_1,\ x_2$ az egyenlet valós gyökeit jelölik.
   a) A p paraméter mely értékére lesz $x_1+x_2=0$?
   b) A p paraméter mely értékére lesz $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=2$?

3. Egy dobozban összesen 79 darab fehér és piros golyó van, melyek között vannak nagyok és kicsik is. A következőket tudjuk:
   - A piros golyók száma osztható 11-gyel.
   - Legkevesebb a kis fehér golyóból van.
   - A nagy piros golyók száma egyenlő a fehér golyók számával.
   - Mindegyik fajta golyó száma prímszám.

   Melyik fajta golyóból hány darab van?

4. Az egyenlő szárú *ABC* háromszögben *AB* = *AC*. Az alap és a szár hosszának az aránya 2:5.
   a) Igazoljuk, hogy a háromszög súlypontja illeszkedik a háromszög beírt körére.
   b) Hányszorosa a háromszög köré írt kör sugara a beírt kör sugarának?

5. Egységnyi oldalú szabályos háromszög belsejében van 33 különböző pont. Bizonyítsuk be, hogy van köztük 3 olyan, amelyek által meghatározott háromszög területe nem nagyobb, mint $\frac{\sqrt{3}}{64}$!

6. Az $N = 9 + 99 + 999 + \ldots + 99\ldots9$ szám tízes számrendszerbeli alakjában hányszor fordul elő az 1-es számjegy, ahol az N utolsó tagja 2023 darab 9-es számjegyet tartalmaz?

11. évfolyam gimnázium, I. forduló

pontozási útmutató

1. Egy szabályos dobókockával 4-szer dobunk egymás után.
   a) Hányféle dobássorozat jöhet létre?
   b) Hányféle dobássorozat van, melyben a második dobásra, és csak arra dobunk, 3-ast?
   c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első dobás eredménye különbözik a többi dobás eredményétől?

Megoldás:

a) Mindegyik dobás hatféle lehet, így összesen $6^4 = 1296$ számsorozatot kaphatunk. (2 pont)

b) Az egy hármas helyére egy hely van, a többi helyre öt számjegy kerülhet, így a feltételnek megfelelő számsorozatok száma: $5^3 = 125$. (2 pont)

c) Az első helyen hatféle szám állhat, míg a többi helyen ötféle szám. (2 pont)
Ezért a kedvező esetek száma $6 \cdot 5^3 = 750$. (2 pont)
A kérdéses valószínűség: $P = \frac{6 \cdot 5^3}{6^4} \approx 0{,}579$ (2 pont)

Összesen: 10 pont

2. Tekintsük az $(p + 10)x^2 + (2p - 4)x + 6 = 0$ másodfokú egyenletet, ahol p valós paraméter; $x_1,\ x_2$ az egyenlet valós gyökeit jelölik.
   a) A p paraméter mely értékére lesz $x_1 + x_2 = 0$?
   b) A p paraméter mely értékére lesz $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$?

Megoldás:

A feladat kérdéseiből adódik, hogy az egyenlet másodfokú, $p \neq -10$ és akkor van valós gyök, ha a diszkrimináns

$$(2p - 4)^2 - 24(p + 10) \geq 0, \quad \text{(1 pont)}$$

ahonnan

$$p^2 - 10p - 56 \geq 0. \quad \text{(1 pont)}$$

Ez akkor teljesül, ha $p \leq -4$ vagy $p \geq 14$. (1 pont)

a) A gyökök és együtthatók összefüggéséből

$$x_1 + x_2 = -\frac{2p-4}{p+10} = 0. \quad \text{(1 pont)}$$

Ez $p = 2$ esetén teljesül, amire nincs valós gyök, így a gyökök összege sohasem lesz 0. (1 pont)

b) A gyökök szorzata $\frac{6}{p+10}$, ezért, ha vannak valós gyökök, akkor azok egyike sem 0.
Az összefüggést átalakítva:

$$x_1^2 + x_2^2 = 2(x_1 x_2)^2, \quad \text{(1 pont)}$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2(x_1 x_2)^2 .$$

(1 pont)

Másképpen: $\left(\frac{4-2p}{p+10}\right)^2 - \frac{12}{p+10} = 2\left(\frac{6}{p+10}\right)^2$, ahonnan (1 pont)

$p^2 - 7p - 44 = 0$, ami $p = -4$ és $p = 11$ esetén teljesül. (1 pont)

Az eredeti egyenletnek $p = 11$ esetén nincs valós gyöke,
$p = -4$ esetén teljesül a valós gyökök közötti összefüggés. (1 pont)

Összesen: **10 pont**

3. Egy dobozban összesen 79 darab fehér és piros golyó van, melyek között vannak nagyok és kicsik is. A következőket tudjuk:
   - A piros golyók száma osztható 11-gyel.
   - Legkevesebb a kis fehér golyóból van.
   - A nagy piros golyók száma egyenlő a fehér golyók számával.
   - Mindegyik fajta golyó száma prímszám.

   Melyik fajta golyóból hány darab van?

Megoldás:

A negyedik feltétel alapján a négy prímszám összege csak úgy lehet 79, ha valamelyik golyóból 2 db van, ami csak a kis fehér golyók száma lehet. (2 pont)

A nagy piros golyók számát jelölje P, a kis piros golyók számát p, a nagy fehér golyók számát F. Az előzőek alapján $P + p + F = 77$. (2 pont)

Mivel $P + p$ osztható 11-gyel, ezért a fenti egyenletből adódik, hogy F is osztható 11-gyel, de mivel prím is, ezért $F = 11$. (3 pont)

Innen $P + p = 66$ és $P = F + 2 = 13$. (1 pont)

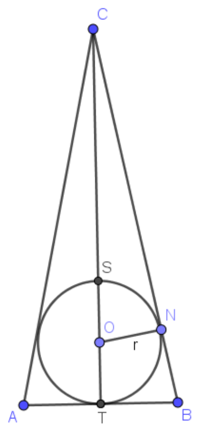
A fentiek alapján a kis piros golyók száma 53, ami prímszám. (2 pont)

Összesen: **10 pont**

4. Az egyenlő szárú *ABC* háromszögben *AB* = *AC*. Az alap és a szár hosszának az aránya 2:5.
   a) Igazoljuk, hogy a háromszög súlypontja illeszkedik a háromszög beírt körére.
   b) Hányszorosa a háromszög köré írt kör sugara a beírt kör sugarának?

Megoldás:

Készítsünk ábrát!



a) A feltételek alapján, ha *AB*= 2*x*, akkor *BC* = 5*x*. A háromszög félkerülete 6*x*. (1 pont)

A háromszög *CT* magassága a *CTB* derékszögű háromszögből: *CT* = $\sqrt{24}x$. (1 pont)

A háromszög területét kétféleképpen felírva $r \cdot 6x = x \cdot \sqrt{24}x$. Innen $r = \frac{\sqrt{6}}{3}x$. (2 pont)

Jelölje *S* a beírt kör és a *CT* magasság (súlyvonal) metszéspontját.

Így $\frac{TS}{TC} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}x\right)}{(2\sqrt{6}x)} = \frac{1}{3}$, ami azt jelenti, hogy az *S* pont a *CT*-n a súlypont. (2 pont)

b) A köré írt kör sugara: $R = \frac{2x \cdot 5x \cdot 5x}{4T}$, a beírt kör sugara: $r = \frac{T}{6x}$. (2 pont)

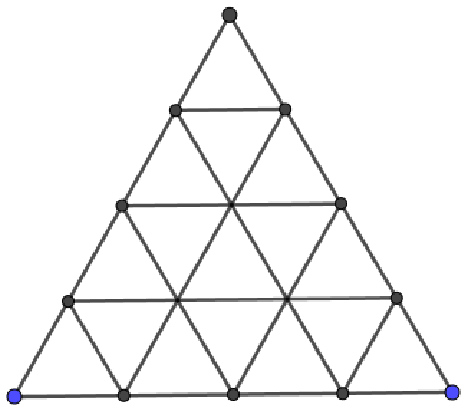
Behelyettesítve a $T = 2\sqrt{6}x^2$-t, $\frac{R}{r} = \frac{25}{2}$ adódik. (2 pont)

Összesen: 10 pont

5. Egységnyi oldalú szabályos háromszög belsejében van 33 különböző pont. Bizonyítsuk be, hogy van köztük 3 olyan, amelyek által meghatározott háromszög területe nem nagyobb, mint $\frac{\sqrt{3}}{64}$.

Megoldás:

Osszuk fel a szabályos háromszög oldalait 4 egyenlő részre, és az osztópontokat kössük össze az oldalakkal párhuzamos szakaszokkal, lásd ábra!



Így a háromszöget 16 egybevágó kis szabályos háromszögre bontottuk. (4 pont)
Ebben az ábrában akárhogy is helyezünk el 33 pontot, lesz három olyan pont, melyek egy kis háromszögben, vagy annak határán vannak. (3 pont)
Ilyen három pont által meghatározott háromszög területe legfeljebb 16-od része az eredeti háromszög területének, ami $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{\sqrt{3}}{64}$.
(3 pont)

Összesen: **10 pont**

6. Az $N = 9 + 99 + 999 + \ldots + 99\ldots9$ szám tízes számrendszerbeli alakjában hányszor fordul elő az 1-es számjegy, ahol az N utolsó tagja 2023 darab 9-es számjegyet tartalmaz?

Megoldás:

Az összegben szereplő *n*-edik tagot írjuk át a következő alakba: $99\ldots9 = 10^n - 1$ (4 pont)
Ha mindegyik tagra elvégezzük a fenti átírást, akkor,
$N = 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{2023} - 2023 = 111\ldots10 - 2023$ (2 pont)
A kivonás elvégzése után:
$N = 111\ldots109087$, ami 2019 darab 1-es számjegyet tartalmaz. (4 pont)

Összesen: **10 pont**

12. évfolyam gimnázium, I. forduló

1. Mennyi az első n természetes szám összegének az 5-tel való osztási maradéka, ha ezen számok négyzetösszege nem osztható 5-tel?

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:
$$x(x+5y)=39,$$
$$y(4y-9x)=-38.$$

3. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a $P(3;-7)$ pontra és amiből az $y=x+4$ és az $y=x-3$ egyenesek 5 egység hosszú szakaszt metszenek ki!

4. Egy szabályos tetraédert elforgatunk az egyik forgástengelye körül 60°-kal. Mekkora a két tetraéder közös részének a térfogata és felszíne?

5. Az ABC háromszögben $BC > AB$. A D pont az BC oldal olyan pontja, hogy $CD = AB$. Az E jelölje az AD szakasz, illetve a P a BC szakasz felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy az ABC szög szögfelezője merőleges az EP egyenesre!

6. Egy $2n\times 2n$ négyzettábla mezőin $3n$ korongot helyeztünk el úgy, hogy bármely mezőn legfeljebb egy korong legyen. Bizonyítsuk be, hogy a táblázatból eltávolíthatunk n sort és n oszlopot úgy, hogy a megmaradt mezőkön egyetlen korong se legyen!

12. évfolyam gimnázium, I. forduló

pontozási útmutató

1. Mennyi az első n természetes szám összegének az 5-tel való osztási maradéka, ha ezen számok négyzetösszege nem osztható 5-tel?

Megoldás:

A pozitív egész számok ötös maradéka rendre: 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, … (1 pont)
A négyzeteik ötös maradéka sorra: 1, 4, 4, 1, 0, 1, 4, … (2 pont)
Látható, hogy akkor nem kapunk a négyzetek összegére 5-tel osztható összeget, ha az n-edik tag: $n = 5k + 1,\ k \in N$ vagy $n = 5k + 3,\ k \in N$. (2 pont)
Ha $n = 5k + 1$, akkor az első n pozitív egész szám összege 1 maradékot ad 5-tel osztva. (2 pont)
Ha $n = 5k + 3$, akkor az első n pozitív egész szám összege 1+2+3, azaz 1 maradékot ad 5-tel osztva. (2 pont)
Tehát, ha az első n természetes szám négyzetének összege nem osztható 5-tel, akkor az első n természetes szám összege 5-tel osztva 1 maradékot ad. (1 pont)
Összesen: 10 pont

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:

$$x(x + 5y) = 39,$$
$$y(4y - 9x) = -38.$$

Megoldás:

A két egyenletet összeadva $4y^2 + x^2 - 4xy = 1$, amit átalakítva (2 pont)

$$(2y - x)^2 = 1,$$ (1 pont)

ahonnan

$$2y - x = 1, \text{ vagy } 2y - x = -1,$$ (2 pont)

innen

$$(2y - 1)(7y - 1) = 39,$$

rendezve

$$14y^2 - 9y - 38 = 0,$$ (1 pont)

ahonnan a megoldások:

$$(3; 2), \left(-\frac{19}{14}; -\frac{52}{14}\right).$$ (2 pont)

A másik esetben pedig

$$(2y + 1)(7y + 1) = 39,$$

innen

$$14y^2 + 9y - 38 = 0,$$ (1 pont)

ebben az esetben a megoldások:

$$(-3; -2), \left(\frac{19}{14}; \frac{52}{14}\right).$$ (1 pont)

Összesen: 10 pont

3. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a $P(3;-7)$ pontra és amiből az $y=x+4$ és az $y=x-3$ egyenesek 5 egység hosszú szakaszt metszenek ki!

<u>Megoldás:</u>

A $P(3;-7)$ pontra illeszkedő egyenesek paraméteres egyenlete:
$y+7=m(x-3)$, $m\neq 1$, mert nem párhuzamos az adott egyenesekkel. (2 pont)
A fenti egyenes metszéspontja az $y=x+4$ egyenessel: $x+11=mx-3m$,
Innen

$$x=\frac{3m+11}{m-1} \text{ és } y=\frac{7m+7}{m-1}.$$ (2 pont)

$y=x-3$ egyenessel való metszéspontjának koordinátái:

$$x=\frac{3m+4}{m-1} \text{ és } y=\frac{7}{m-1}.$$ (2 pont)

A két metszéspont távolságának négyzete:

$$\left(\frac{7}{m-1}\right)^2+\left(\frac{7m}{m-1}\right)^2=25.$$ (1 pont)

Ahonnan

$$24m^2+50m+24=0, \text{ és ebből } m_1=-\frac{3}{4}, m_2=-\frac{4}{3}.$$ (1 pont)

Két megfelelő egyenes van, melyek egyenlete:

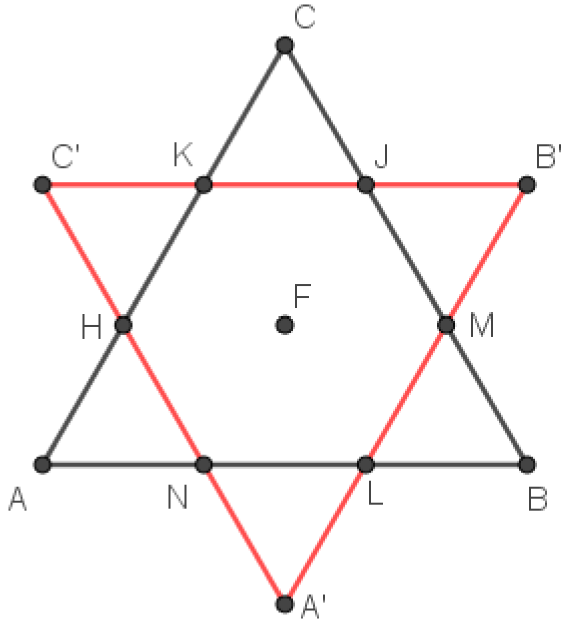
$$y=-\frac{4}{3}x-3 \text{ és } y=-\frac{3}{4}x-\frac{19}{4}.$$ (2 pont)

Összesen: **10 pont**

4. Egy szabályos tetraédert elforgatunk az egyik forgástengelye körül 60°-kal. Mekkora a két tetraéder közös részének a térfogata és felszíne?

Megoldás:

Készítsünk ábrát a gúlák alaplapjairól:



AC 60°-os elforgatottja *A'C'*, amely *AC*-vel 60°-os szöget zár be. Így pl.: az *ANH* háromszög szabályos és egybevágó *A'LN* háromszöggel, ami egybevágó az *LBM* háromszöggel. (2 pont)

Tehát a két gúla alaplapjainak a közös része egy olyan szabályos hatszög, melynek alapéle a háromszög oldalának a harmada. (1 pont)

Ha a tetraéder éleit 3*a*-val jelöljük és a negyedik csúcsát *E*-vel, akkor a gúlák magassága *EF*, aminek hosszát az *AFE* derékszögű háromszögből kapjuk. (1 pont)

$$EF^2 = AE^2 - AF^2 = 9a^2 - \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3a\right)^2 = 6a^2,\ EF = \sqrt{6}a.$$ (2 pont)

A szabályos hatszög alapú gúla térfogata:

$$V = \frac{1}{3}\cdot\left(a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6\right)\cdot\sqrt{6}a = \frac{\sqrt{18}}{2}a^3.$$ (1 pont)

Az oldallapmagasságok: Ha pl. *HK* felezőpontját *T* jelöli, akkor a *TFE* derékszögű háromszögből $TF = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3a = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$

$$m = \sqrt{6a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{2}a.$$ (2 pont)

A szabályos hatszög alapú gúla felszíne:

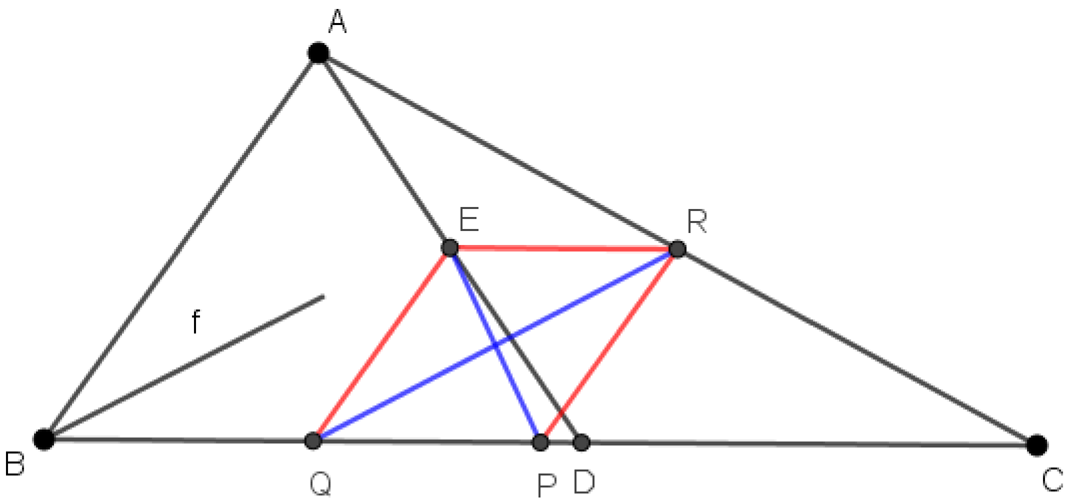
$$A = a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6 + 6\frac{\sqrt{27}}{4}a^2 = \frac{3a^2}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{27}) = 6\sqrt{3}a^2.$$ (1 pont)

Összesen: **10 pont**

5. Az *ABC* háromszögben *BC* > *AB*. A *D* pont az *BC* oldal olyan pontja, hogy *CD* = *AB*. Az *E* jelölje az *AD* szakasz, illetve a *P* a *BC* szakasz felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy az *ABC* szög szögfelezője merőleges az *EP* egyenesre!

Megoldás:

Készítsünk ábrát a feladatnak megfelelően, és használjuk annak jelöléseit:



A jó ábra elkészítése. (1 pont)

Az *AD* szakasz *E* felezési pontján keresztül húzzunk párhuzamost *DC*-vel, ez a párhuzamos *AC*-t *R*-ben metszi. Így *ER* az *ADC* háromszög *DC*-hez tartozó középvonala, ezért

$$ER = \frac{DC}{2} = \frac{AB}{2}.$$ (2 pont)

Mivel *R* az *AC* szakasz felezőpontja, *P* a *BC* szakasz felezőpontja, így *PR* az *ABC* háromszög *AB* oldalhoz tartozó középvonala, tehát

$$RP = \frac{AB}{2}.$$ (2 pont)

Az *E* ponton keresztül húzott *AB*-vel párhuzamos egyenes *BC*-t *Q*-ban metszi. Az *EQ* középvonal az *ABD* háromszögben, ezért

$$EQ = \frac{AB}{2}.$$ (1 pont)

A *QPRE* négyszögben $ER = RP = EQ, RP||EQ$, ezért a négyszög rombusz. (2 pont)

Tehát *QR* merőleges *EP*-re, és felezi az *EQP* szöget. Az *ABC* szög egyállású *EQC* szöggel, így szögfelezőik párhuzamosak, azaz *ABC* szög szögfelezője merőleges *EP*-re. (2 pont)

Összesen: **10 pont**

6. Egy $2n \times 2n$ négyzettábla mezőin $3n$ korongot helyeztünk el úgy, hogy bármely mezőn legfeljebb egy korong legyen. Bizonyítsuk be, hogy a táblázatból eltávolíthatunk n sort és n oszlopot úgy, hogy a megmaradt mezőkön egyetlen korong se legyen!

Megoldás:

Kezdjük a sorokkal. Mivel a táblázatban véges sok korong van, így van legalább egy olyan sor, melyen a legtöbb korong áll. Az első lépésben hagyjuk el ezt a sort, vagy egy ilyet. (2 pont)
Ez alapján hagyjuk el a második, harmadik,…, n-edik sort. (1 pont)
Ekkor a megmaradt n sorban nem lehet n-nél több korong. Mert, ha legalább $n + 1$ korong maradna, akkor lenne olyan sor, melyen legalább két korong lenne. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy az elhagyott sorok mindegyikén legalább két korong volt. (2 pont)
Ebből az következik, hogy kezdetben a táblán legalább $2n + n + 1 = 3n + 1$ korong volt, ami ellentmond annak, hogy $3n$ korongot tettünk a táblára. (2 pont)
Ezek alapján az n sor törlése után a táblán legfeljebb n korong lehet, így legfeljebb n oszlop lesz, amin van korong, így ezek törlésével a megmaradt táblán nem lesz korong. (1 pont)

Összesen: **10 pont**