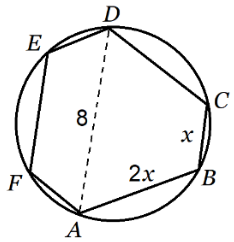
4 megye matematika versenye

11. osztály

1. Oldja meg a $\sqrt{x^6 + 2x^3 + 1} \leq x + 1$ egyenlőtlenséget.

2. Egy körön felvettük az $ABCDEF$ hatszög csúcsait úgy, hogy minden második oldal ugyanakkora, $AB = CD = EF = 2 \cdot BC = 2 \cdot DE = 2 \cdot EF$, továbbá $AD = 8$.



Mekkora a hatszög kerülete?

3. Egy szigeten lovagok és lókötők élnek. A lovagok minden állítása igaz, a lókötők mindig hazudnak. A sziget egy 7×7-es parcellájának mindegyik mezőjén egy szigetlakó áll, és mindenki azt mondja, hogy van lókötő szomszédja. Két parcella szomszédos, ha van közös csúcsa. Legkevesebb hány lókötő van ebben a 7×7-es parcellában?

4. Mennyi $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ lehetséges legkisebb pozitív értéke, ha az a, b, c számok pozitív egészek?

5. Egy pozitív egész számhoz hozzáadtuk a legnagyobb valódi osztóját, és így 10-nek egy hatványát kaptuk. Keresse meg az összes ilyen számot.

6. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok egy sorrendje *hullámzó*, ha bármelyik nem szélen álló szám mindkét szomszédja vagy nagyobb tőle, vagy mindkettő kisebb. Így a 214365 sorrend hullámzó, míg a 214356 sorrend nem az. Hány hullámzó sorrendje van ennek a hat számnak?

Mindegyik feladat 10 pontot ér.

Janus Pannonius Gimnázium, Pécs

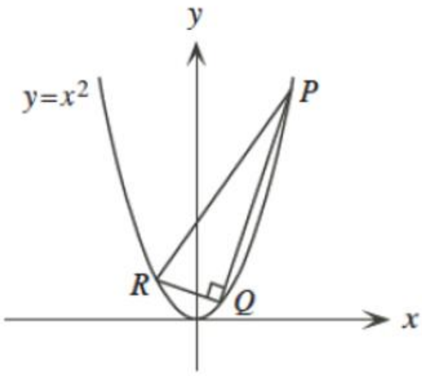
2022. január 28.

4 megye matematika versenye

12. osztály

1. Oldja meg a $\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} \geq 1 - x$ egyenlőtlenséget.

2. A P, Q, R pontok az $y = x^2$ parabolán vannak, koordinátáik (p, p^2), (q, q^2) és (r, r^2) az ábra szerint.



A *PQR* háromszög derékszögű (a derékszögű csúcs *Q*), és *p*, *q*, *r* egész számok. Mutassa meg, hogy $2q + p + r = 0$.

3. Egy szigeten lovagok és lókötők élnek. A lovagok minden állítása igaz, a lókötők mindig hazudnak Közülük 12-en ülnek egy asztal körül, és mindenki azt mondja: „Mindkét szomszédom lókötő”. Hány lókötő ülhet az asztal körül?

4. Adott egy négyzet és a síkjában egy pont. A pontnak a négyzet három csúcsától mért távolsága 5, 11 és 17. Mekkora a négyzet területe?

5. Egy 3-nál nagyobb egész szám az őt megelőző három szám legnagyobb valódi osztójának összege. Keresse meg az összes ilyen számot.

6. A pozitív egészeken értelmezett $f(n)$ függvényre $f\big(f(n)\big) = 2n$ és $f(4n + 1) = 4n + 3$ teljesül. Mennyi $f(100)$ értéke?

Mindegyik feladat 10 pontot ér.

Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
2022. január 28.

Javítási útmutató
11. osztályosok versenye

Útmutatás a pontozáshoz: *Nem lehet felkészülni előre pontosan arra, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírttól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.*

1. Oldja meg a $\sqrt{x^6+2x^3+1} \le x+1$ egyenlőtlenséget.

Megoldás. $\sqrt{x^6+2x^3+1} = \sqrt{(x^3+1)^2} = |x^3+1|$, azaz $|x^3+1| \le x+1$. ***2 pont***

Az abszolút értéket az $x<-1$, illetve az $x \ge -1$ intervallumon el tudjuk hagyni. ***1 pont***

$x<-1$ esetén az egyenlőtlenségnek nincs megoldása, hiszen $|x^3+1| \le x+1 < 0$ nem teljesülhet. ***1 pont***

Ha $x \ge -1$, akkor $|x^3+1| = x^3+1$.

Ekkor az egyenlőtlenség: $x^3+1 \le x+1$. ***1 pont***

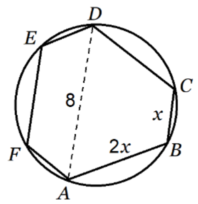
$x^3 - x \le 0$, azaz $x(x-1)(x+1) \le 0$. ***1 pont***

Ennek megoldásai: $x \le -1$ és $0 \le x \le 1$. ***2 pont***

Az $x \ge -1$ feltétel miatt a megoldást jelentő számok: $0 \le x \le 1$, illetve $x=-1$. ***2 pont***

Aki nem írja le, hogy $x=-1$ is megoldás, attól vonjunk le ***1 pontot***.

2. Egy körön felvettük az *ABCDEF* hatszög csúcsait úgy, hogy minden második oldal ugyanakkora, $AB = CD = EF = 2 \cdot BC = 2 \cdot DE = 2 \cdot EF$, továbbá $AD = 8$.



Mekkora a hatszög kerülete?

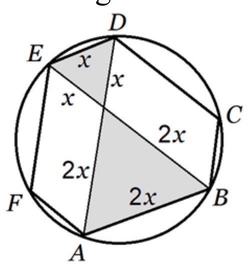
1. megoldás. Az *ACE* és a *BDF* háromszög is egyenlő oldalú, hiszen ugyanakkora ívek illeszkednek az oldalakra. ***2 pont***

Így az oldalakhoz tartozó rövidebb köríven (azaz a hatszög csúcsainál) $120°$-os kerületi szögek vannak, a hatszög szögei $120°$-osak. ***2 pont***

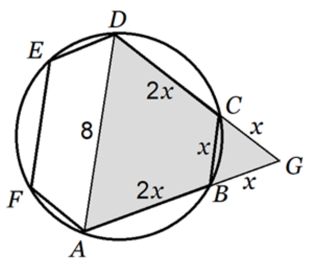
Rajzoljuk meg az *AD* és *EB* átlókat. (Lásd az 1. ábrát.) Az így keletkező két befestett háromszög mindegyike szabályos. ***2 pont***

$AD = x + 2x = 3x = 8$. ***2 pont***

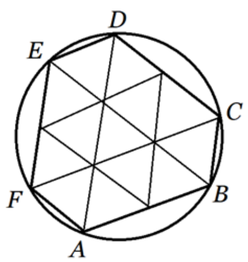
A hatszög kerülete $3 \cdot 3x = 3 \cdot 8 = 24$. ***2 pont***



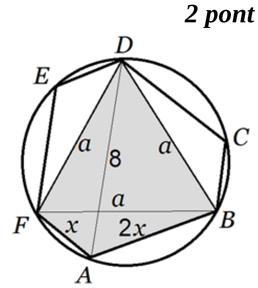
1. ábra



2. ábra



3. ábra



4. ábra

2. megoldás. Tudjuk, hogy a hatszög szögei $120°$-osak. ***4 pont***

Hosszabbítsuk meg a hatszög *AB* és *DC* oldalegyenesét, ezek metszéspontja *G*. A *BGC* háromszög szögei egyenlők, így az oldalai is. Ezért a hozzá hasonló *AGD* háromszög is szabályos. ***2 pont***

A háromszög *AD* oldala $3x$, azaz $3x = 8$. ***2 pont***

A hatszög kerülete $3 \cdot 3x = 3 \cdot 8 = 24$. ***2 pont***

3. megoldás. Mint már láttuk, a hatszög szögei $120°$-osak. ***4 pont***

Rajzoljuk meg a hatszög leghosszabb átlóit és kössük össze a hosszabb oldalak felezőpontjait (lásd a 3. ábrát). ***2 pont***

Látjuk, hogy az *AD* átló hossza $3x$, azaz $3x = 8$. ***2 pont***

A hatszög kerülete $3 \cdot 3x = 3 \cdot 8 = 24$. ***2 pont***

4. megoldás. A *BDF* háromszög egyenlő oldalú, az oldalak hosszát jelölje a. ***2 pont***

Írjuk fel a Ptolemaiosz-tételt az *ABDF* húrnégyszögben (lásd a 4. ábrát):

$8 \cdot a = x \cdot a + 2x \cdot a.$ ***4 pont***

Innen $8 = x + 2x = 3x$. ***2 pont***

A hatszög kerülete $3 \cdot (x + 2x) = 3 \cdot 3x = 3 \cdot 8 = 24$. ***2 pont***

5. megoldás. Tudjuk, hogy a hatszög szögei $120°$-osak. ***4 pont***

Írjuk fel a koszinusz-tételt a *DEF* háromszögben: $FD^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot (2x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$, azaz $FD^2 = 7x^2$. ***2 pont***

Az *FAD* háromszögben: $FD^2 = x^2 + 8^2 - 2 \cdot x \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$, azaz $FD^2 = x^2 - 8x + 64$. ***1 pont***

$7x^2 = x^2 - 8x + 64$, azaz $(3x - 8)(x + 4) = 0$, ezért $3x = 8$. ***1 pont***

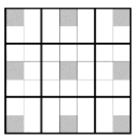
A hatszög kerülete $3 \cdot 3x = 3 \cdot 8 = 24$. ***2 pont***

3. Egy szigeten lovagok és lókötők élnek. A lovagok minden állítása igaz, a lókötők mindig hazudnak. A sziget egy 7×7-es parcellájának mindegyik mezőjén egy szigetlakó áll, és mindenki azt mondja, hogy van lókötő szomszédja. Két parcella szomszédos, ha van közös csúcsa. Legkevesebb hány lókötő van ebben a 7×7-es parcellában?

Megoldás. A lókötők hazudnak, tehát egy lókötő minden szomszédja lovag. ***2 pont***

Egy lovagnak legalább az egyik szomszédja lókötő. ***1 pont***

Nézzük az ábrán kijelölt 9 területet. Ha egy-egy ilyen területen csak lovagok élnek, akkor a befestett cellán lévő lovag nem mond igazat. Tehát mindegyik területen van legalább 1 lókötő. A parcellában legalább 9 lókötő él.



4 pont

Van olyan konstrukció, amikor 9 lókötő van a parcellában: ha a befestett mezőkön lókötő, a többi mezőn lovag él. ***3 pont***

A pontozásról. Egy más elrendezésre, amikor 10-11 lókötő van a parcellán, adjunk ***3 pontot***, 12-13 lókötőre adjunk ***2 pontot***, 14-16 lókötőre ***1 pontot***.

4. Mennyi $a^3+b^3+c^3-3abc$ lehetséges legkisebb pozitív értéke, ha az a, b, c számok pozitív egészek?

Megoldás. Vizsgáljuk az $S=a^3+b^3+c^3-3abc$ kifejezést.

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$$

így

$$S=(a+b+c)^3-3a^2b-3ab^2-3a^2c-3ac^2-3b^2c-3bc^2-9abc.$$

Mivel

$$a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+3abc=(a+b+c)(ab+bc+ca),$$

így

$$S=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)=$$
$$=(a+b+c)([a+b+c]^2-3[ab+bc+ca])=$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

Tehát $S=a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$. ***4 pont***

$a=b=c$ nem lehet, mert ekkor $S=a^3+b^3+c^3-3abc=0$. ***1 pont***

Ezért az a, b, c pozitív egészekre $a+b+c\geq 1+1+2=4$. ***1 pont***

Továbbá $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0+1+1=2$. ***1 pont***

Ezek miatt $S\geq\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4$. ***1 pont***

$S=4$ teljesülhet. Ha $a=1, b=1, c=2$, akkor
$S=a^3+b^3+c^3-3abc=1+1+8-6=4$. ***2 pont***

Tehát a keresett legkisebb érték 4.

5. Egy pozitív egész számhoz hozzáadtuk a legnagyobb valódi osztóját, és így 10-nek egy hatványát kaptuk. Keresse meg az összes ilyen számot.

Megoldás. A választott szám legyen N, és a legnagyobb osztója m, így $N = mp$, ahol p az N legkisebb prímosztója. $N + m = 10^k$, azaz $m(p + 1) = 10^k$. ***1 pont***

$p = 2$ nem lehet, mert $p + 1 = 3$ nem osztója 10-nek, és 10 hatványainak sem. ***1 pont***

$p > 2$ páratlan prím, és p az N legkisebb prímosztója, így N nem osztható 2-vel. ***1 pont***

N páratlan, m is páratlan. $m(p + 1) = 10^k$, tehát $m = 5^s$. ***1 pont***

$m > 1$, hiszen $m = 1$ esetén $N = p$ prím, $N + 1 = p + 1 = 10^k$,

ám ez nem lehet, mert $p = 10^k - 1$ osztható 9-cel, azaz összetett szám. ***1 pont***

$s \geq 1$, ezért N osztható 5-tel. Mivel p az N legkisebb prímosztója, így $p \leq 5$. ***1 pont***

Ha $p = 3$, akkor $m(p + 1) = 10^k$ miatt $4 \cdot 5^s = 10^k$. ***1 pont***

Innen $k = 2, m = 25$ és $N = 75$. ***1 pont***

Ha $p = 5$, akkor $m(p + 1) = 10^k$ miatt $p + 1 = 6$ osztója a 10-hatványnak, ami nem lehet. Ezért $p = 5$ esetén nincs megoldás. ***1 pont***

Tehát a feladatnak egyetlen megoldása van, ez a 75. ***1 pont***

6. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok egy sorrendje *hullámzó*, ha bármelyik nem szélen álló szám mindkét szomszédja vagy nagyobb tőle, vagy mindkettő kisebb. Így a 214365 sorrend hullámzó, míg a 214356 sorrend nem az. Hány hullámzó sorrendje van ennek a hat számnak?

Megoldás. Jelölje az $1, 2, \cdots, n$ számok hullámzó sorrendjeinek számát $H(n)$.
A hullámzó számoknak két típusát különböztessük meg aszerint, hogy az első két számból az első kisebb a másodiknál, vagy nagyobb. Az ilyen típusú számok számát jelölje $N(n)$, illetve $C(n)$, azaz a sorrend növekedve, vagy csökkenve indul.
Egyrészt $H(n) = N(n) + C(n)$, hiszen egy hullámzó sorrendnek ez a két lehetősége van.

1 pont

Másrészt $N(n) = C(n)$, hiszen a két típus sorrendjei egymással párba állíthatók úgy, hogy egy számsorrendnek a párját úgy kapom, hogy minden számot kicserélek a komplementerével, azaz a helyébe $(n+1) - a$ kerül. ***1 pont***

Nézzük meg kicsiben, 6 helyett kisebb értékekre.
$H(2) = 2$, hiszen 12 és 21 megfelelő sorrend.
$H(3) = 4$, a megfelelő sorrendek 132, 231, illetve 312, 213.
$H(4) = 10$, a megfelelő sorrendek 1423, 1324, 2413, 2314, 3412, illetve a komplementer sorrendek 4132, 4231, 3142, 3241, 2143.

$H(5) =?$
Ehhez elég $N(5)$-öt kiszámolni. A lehetőségeket úgy csoportosítjuk, hogy melyik helyen áll az 5. Mivel az öt számból ez a legnagyobb, vagy a 2., vagy a 4. helyen áll.
Ha a 2. helyen áll, akkor az első szám 4-féle lehet, és a megmaradó három számnak $N(3) = 2$ sorrendje van. A sorrendek száma $2 \cdot 4 = 8$.
Amikor az 5 a 4. helyen áll, azoknak szintén 8 sorrendje van, hiszen az előbbi sorrendek megfordításával kapjuk meg őket. Például az 15243 sorrendből a 34251 sorrendet kapjuk tükrözéssel.
Tehát $N(5) = 8 + 8 = 16$, ezért $H(5) = 16 + 16 = 32$. ***3 pont***

$H(6) =?$
Számoljuk ki $N(6)$-ot, az előbbihez hasonló úton.
A hat szám közül a legnagyobb a 6, ez a 2., 4., vagy a 6. helyen állhat.
Ha a 2. helyen áll a 6, akkor a lehetséges sorrendek szám $5 \cdot N(4) = 5 \cdot 5 = 25$. ***1 pont***
Ha a 6 a 4. helyen áll, akkor az első három szám leírása után, már egyértelmű a folytatás. Azt a három számot $\binom{5}{3} = 10$-féleképp választhatjuk. A kiválasztott három számnak $N(3) = 2$ sorrendje volt. Ezért a sorrendek száma $10 \cdot 2 = 20$. ***1 pont***
Amikor a 6 a 6. helyen áll, a megfelelő sorrendek száma $N(5) = 16$. ***1 pont***

Így $N(6) = 25 + 20 + 16 = 61$, ezért a válasz a feladat kérdésére: $H(6) = 61 + 61 = 122$.

2 pont

Javítási útmutató
12. osztályosok versenye

Útmutatás a pontozáshoz: *Nem lehet felkészülni előre pontosan arra, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírttól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.*

1. Oldja meg a $\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} \geq 1 - x$ egyenlőtlenséget.

Megoldás. $x^3 - x^2 - x + 1 = (x^3 - x^2) - (x - 1) = (x - 1) \cdot (x^2 - 1) = (x - 1)^2 \cdot (x + 1)$.

2 pont

Így $\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} = \sqrt{(x + 1) \cdot (x - 1)^2} = |x - 1| \cdot \sqrt{x + 1} = |1 - x| \cdot \sqrt{x + 1}$. ***1 pont***

Tehát az egyenlőtlenség $|1 - x| \cdot \sqrt{x + 1} \geq 1 - x$. ***1 pont***

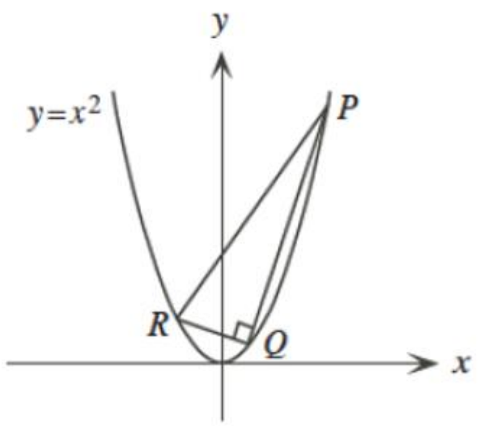
Ha $x < 1$, akkor $(1 - x) \cdot \sqrt{x + 1} \geq 1 - x$, azaz $\sqrt{x + 1} \geq 1$.
Ennek a megoldása: $0 \leq x < 1$. ***2 pont***

Ha $x = 1$, akkor $0 \geq 0$, tehát $x = 1$ megoldás. ***1 pont***

Ha $x > 1$, akkor $(x - 1) \cdot \sqrt{x + 1} \geq 1 - x$, $\sqrt{x + 1} \geq -1$, ez $x \geq -1$ esetén teljesül.
Tekintettel az $x > 1$ feltételre, itt $x > 1$ a megoldás. ***2 pont***

A kapott részmegoldásokból a vizsgált egyenlőtlenség megoldása: $x \geq 0$. ***1 pont***

2. A P, Q, R pontok az $y = x^2$ parabolán vannak, koordinátáik (p, p^2), (q, q^2) és (r, r^2) az ábra szerint.



A PQR háromszög derékszögű (a derékszögű csúcs Q), és p, q, r egész számok. Mutassa meg, hogy $2q + p + r = 0$.

Megoldás. Az ábra szerint $p > q > r$.

A QR és QP egyenesek merőlegesek, ezért a meredekségük szorzata -1. ***2 pont***

QR meredeksége $m_{QR} = \frac{q^2-r^2}{q-r} = q + r$. ***2 pont***

QP meredeksége $m_{QP} = \frac{p^2-r^2}{p-r} = p + r$. ***2 pont***

A meredekségek szorzata $m_{QR} \cdot m_{QP} = (q + r)(p + r) = -1$. ***1 pont***

Mivel p, q, r egész számok, így a két tényező egyike 1, a másik -1. ***2 pont***

Ezért $(q + r) + (p + r) = -1 + 1 = 0$, azaz $2q + p + r = 0$. ***1 pont***

3. Egy szigeten lovagok és lókötők élnek. A lovagok minden állítása igaz, a lókötők mindig hazudnak Közülük 12-en ülnek egy asztal körül, és mindenki azt mondja: „Mindkét szomszédom lókötő”. Hány lókötő ülhet az asztal körül?

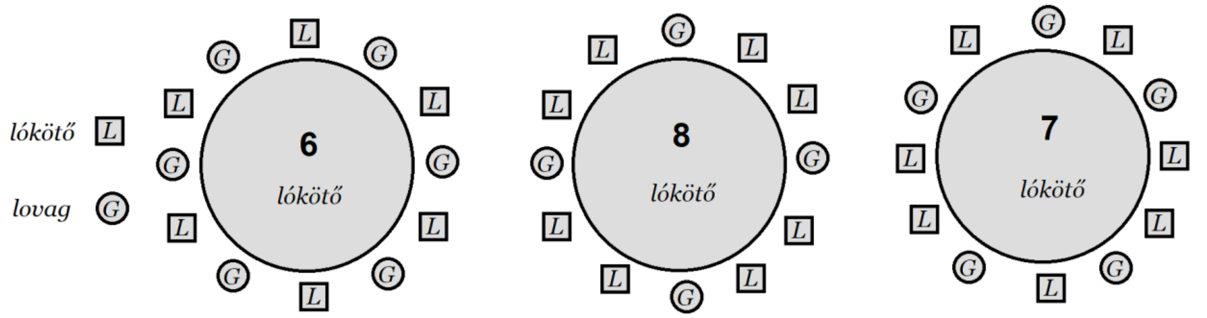
Megoldás. Mindenki nem lehet lókötő, mert akkor mindenki igazat mondana. Van közöttük lovag, és annak mindkét szomszédja lókötő.
Nem ülhet egymás mellett két lovag, azaz bármely két szomszéd egyike lókötő, a $12 = 6 \cdot 2$ lakos között legalább 6 lókötő van.

Ha az L lókötő mindkét szomszédja lovag, akkor mondhatja, hazudhatja azt a lókötő, hogy mindkét szomszédja lókötő. Így felváltva lovag és lókötő ül egymás mellett az asztalnál. Ekkor a lókötők száma 6.

Egy L lókötő ülhet egy lovag és egy lókötő között. Ekkor is hazudik L, amikor azt mondja, hogy mindkét szomszédja lókötő. Tehát ülhet egymás mellett két lókötő, két lovag között. Ekkor 8 lókötő ül az asztalnál.

Három lókötő már nem lehet szomszédos, mert a középen ülő lókötő ekkor igazat mondana.
Bármely 3 egymás mellett ülő szigetlakó egyike lovag, ezért a $12 = 4 \cdot 3$ lakos között legalább 4 lovag van. A lókötők száma 8-nál több nem lehet.

Azt kaptuk, hogy a lókötők száma legalább 6 és legfeljebb 8, és ezek megvalósulnak.

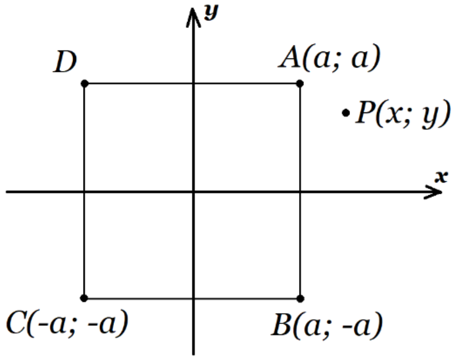


Az ábra mutatja, hogy az asztalnál ülhet 7 lókötő is.

A pontozásról. A 6, 7 és 8 lókötős konstrukciók ***1-1 pontot***, összesen ***3 pontot*** érnek.
Nem ülhet egymás mellett 2 lovag, nem ülhet 3 lókötő, ez ***1-1 pontot*** ér, összesen ***2 pontot***.
Annak indoklása, hogy a lókötők száma legalább 6, legfeljebb 8, ez ***2-2 pont***, összesen ***4 pont***.
A helyes válasz (a lókötők száma 6, 7 vagy 8) ***1 pont***.

4. Adott egy négyzet és a síkjában egy pont. A pontnak a négyzet három csúcsától mért távolsága 5, 11 és 17. Mekkora a négyzet területe?

Megoldás. Tekintsük az ábra jelöléseit. ***1 pont***



(1) $PA^2 = (x-a)^2 + (y-a)^2 = 25$

(2) $PB^2 = (x-a)^2 + (y+a)^2 = 121$

(3) $PC^2 = (x+a)^2 + (y+a)^2 = 289$

Az egyenletekre adjunk ***1-1 pontot.*** (Összesen 3 pont.)

Az első két egyenlet különbsége: $(y+a)^2 - (y-a)^2 = 121 - 25 = 96$, azaz $4ay = 96$, $y = \frac{24}{a}$.

A harmadik és második egyenlet különbsége: $(x+a)^2 - (x-a)^2 = 289 - 121 = 168$, azaz $4ax = 168$, $x = \frac{42}{a}$.

Helyettesítsük az $x = \frac{42}{a}$ és $y = \frac{24}{a}$ értékeket az (1) egyenletbe: $\left(\frac{42}{a} - a\right)^2 + \left(\frac{24}{a} - a\right)^2 = 25$.

$2a^4 - 57a^2 + 2340 = 0$, azaz $(2a^2 - 117)(a^2 - 20) = 0$. ***4 pont***

A négyzet területe $4a^2$, és ez az érték az előbbi egyenlet alapján 234 vagy 80. Első esetben a *P* pont a négyzet belsejében, második esetben a négyzeten kívül van. ***2 pont***

5. Egy 3-nál nagyobb egész szám az őt megelőző három szám legnagyobb valódi osztójának összege. Keresse meg az összes ilyen számot.

Megoldás. Ha *n* páratlan, akkor $n-1$ és $n-3$ páros, így azok legnagyobb valódi osztója $\frac{n-1}{2}$ és $\frac{n-3}{2}$. Ha az $n-2$ legkisebb páratlan osztója *p*, akkor $n-2$ legnagyobb valódi osztója $\frac{n-2}{p}$. A feladat elvárása szerint $n=\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{p}+\frac{n-3}{2}$, azaz $n=n-2+\frac{n-2}{p}$, így $n=2p+2$, ám ez ellentmond annak, hogy *n* páratlan.

Annak tisztázására, hogy *n* páratlan nem lehet, adjunk ***2 pontot***

Ha *n* páros, akkor $n-2$ is páros, és $n-2$ legnagyobb valódi osztója $\frac{n-2}{2}$.

Ha az $n-1$ és $n-3$ legkisebb páratlan osztója *p*, illetve *q*, akkor legnagyobb valódi osztójuk $\frac{n-1}{p}$, illetve $\frac{n-3}{q}$.

A feladat elvárása szerint $n=\frac{n-1}{p}+\frac{n-2}{2}+\frac{n-3}{q}$. ***1 pont***

Ha az $n-1$ és $n-3$ számoknak van 1-nél nagyobb közös osztója, az osztója a két szám különbségének is, azaz osztója 2-nek. Mivel csak páratlan osztóik vannak, emiatt $p \neq q$.

$n=\frac{n-1}{p}+\frac{n-2}{2}+\frac{n-3}{q}=n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)-\left(1+\frac{1}{p}+\frac{3}{q}\right)<n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$, tehát $1<\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, azaz $\frac{1}{2}<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. A *p* és *q* prímek közül az egyik kisebb 4-nél, így ez a prím 3, a másik kisebb 6-nál, ez a prím 5. ***1 pont***

Két lehetőség van $p=3, q=5$, illetve $p=5, q=3$.

Első esetben $n=\frac{n-1}{3}+\frac{n-2}{2}+\frac{n-3}{5}=\frac{31}{30}n-\frac{29}{15}$, így $n=58$. ***1 pont***

Ez megoldás, hiszen $58=\frac{57}{3}+\frac{56}{2}+\frac{55}{5}=19+28+11$, és az 57, 56, 55 legnagyobb valódi osztói 19, 28 és 11. ***1 pont***

Második esetben $n=\frac{n-1}{5}+\frac{n-2}{2}+\frac{n-3}{3}=\frac{31}{30}n-\frac{11}{5}$, így $n=66$. ***1 pont***

Ez is megoldás, hiszen $66=\frac{65}{5}+\frac{64}{2}+\frac{63}{3}=13+32+21$, és a 65, 64, 63 számok legnagyobb valódi osztói 13, 32, 21. ***1 pont***

A keresett szám lehet 58 vagy 66. ***2 pont***

6. A pozitív egészeken értelmezett $f(n)$ függvényre $f\big(f(n)\big) = 2n$ és $f(4n+1) = 4n+3$ teljesül. Mennyi $f(100)$ értéke?

1. megoldás. Mivel $100 = 2^2 \cdot 25$, az itt látott számok közül $f(25)$-öt tudjuk számolni.
$f(25) = 27$. Innen léphetünk $f\big(f(25)\big) = f(27)$ számolásához.
$f(27) = f\big(f(25)\big) = 2 \cdot 25 = 50$. Az előbbi fogással lépkedünk tovább.
$f(2 \cdot 25) = f\big(f(27)\big) = 2 \cdot 27 = 54$,
$f(2 \cdot 27) = f\big(f(2 \cdot 25)\big) = 2^2 \cdot 25$,
$f(2^2 \cdot 25) = f\big(f(2 \cdot 27)\big) = 2^2 \cdot 27$.
Szerencsésen célba értünk: $f(100) = 2^2 \cdot 27 = 108$.

2. megoldás. Az $f\big(f(n)\big) = 2n$ feltételre figyelve:
$f\Big(f\big(f(n)\big)\Big) = f(2n)$, illetve $f\Big(f\big(f(n)\big)\Big) = 2f(n)$ adódik, attól függően, hogy melyik két egymást követő *f* leképezésre használjuk azt.
Ezekből $f(2n) = 2f(n)$ következik.
Ezt többször ismételve $f(2^k \cdot n) = 2^k \cdot f(n)$.
Így $f(100) = f(2^2 \cdot 25) = 2^2 \cdot f(25) = 2^2 \cdot 27 = 108$.

Ha jó úton jár (úgy számolva megkaphatja a választ), arra adjunk ***4 pontot***.
Ha számolásai hibátlanok, arra is adjunk ***4 pontot.***
Helyes válaszra (108-ra) adjunk ***2 pontot.***