Javítási útmutató
11. osztályosok versenye

Útmutatás a pontozáshoz: *Nem lehet felkészülni előre pontosan arra, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírttól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.*

1. Oldja meg a $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2(\log_{x-1}9)\right) > 0$ egyenlőtlenséget a valós számok körében.

Megoldás. A logaritmus értelmezése miatt $1 < x < 2$ vagy $x > 2$. ***1 pont***
$0 < a < 1$ esetén $\log_a z > 0$ akkor teljesül, ha $0 < z < 1$, emiatt $0 < \log_2(\log_{x-1}9) < 1$.
1 pont
$0 < \log_2(\log_{x-1}9) < 1$ akkor teljesül, ha $1 < \log_{x-1}9 < 2$. ***1 pont***
Ha a logaritmus alapja kisebb 1-nél, akkor $\log_{x-1}9 < 0$, így az $1 < \log_{x-1}9 < 2$ egyenlőtlenségnek nincs megoldása. ***2 pont***
Ha a logaritmus alapja nagyobb 1-nél, azaz $x > 2$, akkor
(*) $1 < \log_{x-1}9$, azaz $\log_{x-1}(x-1) < \log_{x-1}9$, innen $x - 1 < 9$, $x < 10$ adódik. ***2 pont***
(**) $\log_{x-1}9 < 2$, azaz $\log_{x-1}9 < \log_{x-1}(x-1)^2$, ebből $9 < (x-1)^2$ következik, és $x > 2$ miatt $3 < x - 1$, azaz $4 < x$. ***2 pont***
(*) és (**) alapján $4 < x < 10$ a megoldás. ***1 pont***

2. Mutassa meg, hogy tetszőleges *a, b, c* valós számok esetén az $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$ egyenletek közül legalább az egyik egyenletnek van valós gyöke.

Megoldás. Ha az *a, b, c* számok egyike sem nulla, akkor mindhárom egyenlet másodfokú.
1 pont

Tegyük fel, az állítással ellentétben, hogy az egyenleteknek nincs valós gyöke, azaz mindegyik diszkrimináns negatív, így: $b^2 - ac < 0$, $c^2 - ab < 0$, $a^2 - bc < 0$. ***2 pont***

Ezek összege $b^2 - ac + c^2 - ab + a^2 - bc < 0$, azaz $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ac - 2ab - 2bc < 0$, vagyis $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 < 0$ lenne, ami ellentmondás. ***3 pont***

Tehát hibás volt az indirekt feltevés, így valamelyik egyenletnek van valós gyöke. ***1 pont***

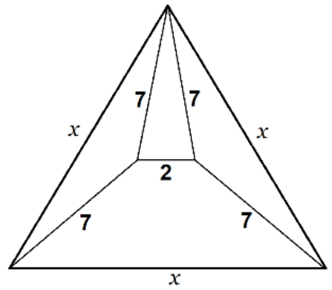
Nézzük most azt az esetet, ha az *a, b, c* számok között van nulla.

Ha egy nulla közülük, pl. $a = 0$, és $b \neq 0$, $c \neq 0$, akkor az első és második egyenletnek is van valós gyöke. Ugyanez a helyzet a másik két esetben. ***1 pont***

Ha kettő is nulla közülük, pl. $a = b = 0$, és $c \neq 0$, akkor a második és harmadik egyenletnek is van valós gyöke. Ugyanez a helyzet a másik két esetben. ***1 pont***

Ha az *a, b, c* számok mindegyike nulla, akkor mindhárom egyenletnek van valós gyöke. ***1 pont***

3. Mekkora az ábrán látható szabályos háromszög oldala?

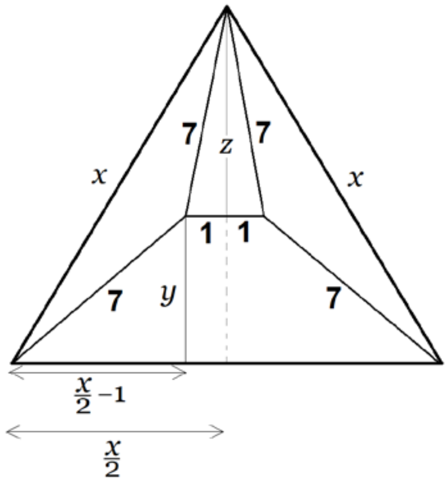


Megoldás. Az ábrán lévő adatokkal, jelölésekkel:

$$y + z = \frac{\sqrt{3}}{2}x \qquad (1)$$

$$z = \sqrt{49-1} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \qquad (2)$$

$$\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 + y^2 = 49 \qquad (3)$$



Ha a versenyző felír olyan egyenleteket, melyekből el lehet jutni a válaszhoz, arra adjunk ***5 pontot***.

(1) és (2) alapján $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - z = \sqrt{3}\left(\frac{x}{2} - 4\right)$.

Ezt beírva a (3) egyenletbe: $49 = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 + 3\left(\frac{x}{2} - 4\right)^2 = x^2 - 13x + 49$, azaz $x^2 - 13x = x(x - 13) = 0$. Innen $x = 13$.

Az egyenletek megoldására ***5 pont***, ebből a helyes válaszra ***1 pont*** jár.

4. Oldja meg a $(3x+5)^2+(x+6)^3=4x^2+1$ egyenletet a valós számok körében.

Megoldás. Rendezzük át az egyenletet:

$$[(3x+5)^2-(2x)^2]+[(x+6)^3-1^3]=0.$$ ***4 pont***

Az a^2-b^2 és a^3-b^3 alakú kifejezések szorzattá alakíthatók, ezért az egyenlet:

$$(x+5)(5x+5)+(x+5)(x^2+13x+43)=0.$$ ***2 pont***

Tehát $(x+5)(x^2+18x+48)=0$. ***1 pont***

A szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Vagy $x+5=0$, azaz $x_1=-5$; vagy $x^2+18x+48=0$, azaz $x_2=-9-\sqrt{33}$, $x_3=-9+\sqrt{33}$. ***3 pont***

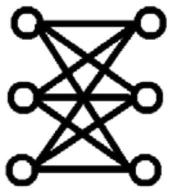
A megoldás során végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezek mind valóban gyökei az eredeti egyenletnek.

5. Egy 24 fős társaságban mindenki három másikat ismer a többiek közül. Az ismeretség kölcsönös. Melyik az a legkisebb k érték, amelyre igaz, hogy bárhogyan választunk k embert közülük, biztosan lesz közöttük két ismerős?

Megoldás: Ha kiválasztunk 13 embert, lesz köztük két ismerős. Ha nem lenne, akkor az ismerőseiket felsorolva, azon a listán $13\cdot 3=39$ név szerepelne, a többi 11 ember neve, egy-egy név többször is a listán. Azonban a 11 névből egy-egy név legfeljebb háromszor szerepelhet, így a listán ezekből a nevekből legfeljebb $11\cdot 3=33$ nevet tartalmazhat a lista. Ez ellentmondás, tehát a 13 fő között vannak ismerősök.

Annak megmutatása, hogy 13 ember között van két ismerős: ***5 pont***.

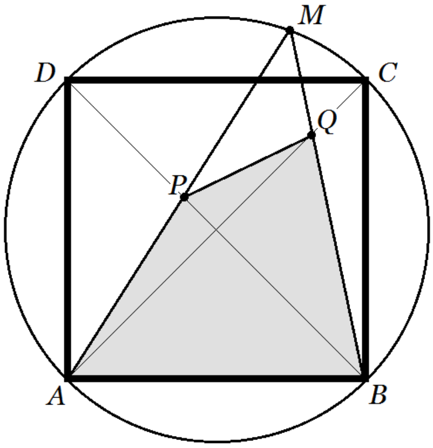
12 embert ki lehet választani, hogy ne legyenek közöttük ismerősök. Szervezzük az ismeretségeket a következő módon. 6 fős csoportokra osztjuk őket, akik között az ismeretségek az ábra szerint vannak.



A 4 ilyen 6 fős csoportból a bal oldalon álló háromfős csoportokat választva kapunk egy 12 fős társaságot, akik között nincs két ember, aki ismerné egymást.

Egy jó konstrukcióra, amikor 12 ember nem ismeri egymást, és teljesülnek a feladat feltételei, arra adjunk ***5 pontot***.

6. Az $ABCD$ négyzet körülírt körén, a CD íven vegyünk fel egy M pontot. AM a BD átlót a P pontban, BM az AC átlót a Q pontban metszi.

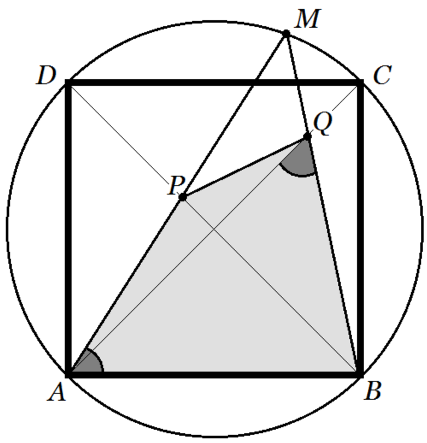


Bizonyítsa be, hogy az $ABQP$ négyszög területe fele az $ABCD$ négyzet területének.

Megoldás. Az $ABQP$ négyszög átlói merőlegesek egymásra, ezért a négyszög területe $T_{ABQP} = \frac{BP \cdot AQ}{2}$. Ez pontosan akkor fele a négyzet területének, ha $BP \cdot AQ = AB^2$.

3 pont

Ez akkor teljesül, ha $\frac{BP}{BA} = \frac{AB}{AQ}$, azaz ha az ABP és a QAB háromszögek hasonlók. ***2 pont***



$AQB\angle = AMQ\angle + MAQ\angle = 45° + MAQ\angle$. ***1 pont***

$PAB\angle = QAB\angle + PAQ\angle = 45° + MAQ\angle$. ***1 pont***

Tehát $AQB\angle = PAB\angle$. ***1 pont***

Az ABP és a QAB háromszögekben van még két egyenlő szög, $ABP\angle = QAB\angle = 45°$.

1 pont

Ezek miatt a két háromszög szögei egyenlők, a két háromszög hasonló. A megfelelő oldalak arányának egyenlőségéből éppen a bizonyítandó állítás adódik. ***1 pont***

Javítási útmutató
12. osztályosok versenye

Útmutatás a pontozáshoz: *Nem lehet felkészülni előre pontosan arra, hogy a versenyzők milyen megoldásokat adnak, a feladatok a leírttól eltérő módon is megoldhatók. A részpontszámok adásánál kövessük azt az utat, ahogyan az érettségi dolgozatokat pontozzuk.*

1. Az a, b, c számok mértani sorozatot alkotnak, és a számok közül 4 a legnagyobb szám. Marci a számokat más sorrendben írta le, így azok most számtani sorozatot alkotnak. Mi lehet ez a számtani sorozat?

Megoldás. $a, b = aq, c = aq^2$, ahol $a \neq 0, q \neq 1$. ***1 pont***

Az a, b, c számoknak $3! = 6$-féle sorrendje van. Ha az a, b, c számok egy mértani sorozat egymást követő elemei, akkor ugyanez igaz a c, b, a sorrendre is. Ha a b, a, c sorrend számtani sorozat, akkor a c, a, b sorrend is számtani sorozat; ugyanígy, ha a, c, b számtani sorozat, akkor b, c, a is az. Tehát két esetet kell vizsgálnunk, a b, a, c és az a, c, b sorrendet. ***1 pont***

Ha b, a, c számtani sorozat, akkor $b + c = 2a$, $aq + aq^2 = 2a$, azaz $q + q^2 = 2$, amelynek a gyökei $q = 1$ és $q = -2$. Mivel $q \neq 1$, így a $q = -2$ eset marad, ekkor $a, -2a, 4a$ mértani sorozat, és a $-2a, a, 4a$ sorrend számtani sorozat. A három szám közül a legnagyobb 4. A számtani sorozat $-2, 1, 4$, illetve $4, -2, -8$. ***3 pont***

Ha az a, c, b sorrend számtani sorozat, akkor $a + b = 2c$, $a + aq = 2aq^2$, $1 + q = 2q^2$, ennek gyökei $q = 1$ és $q = -\frac{1}{2}$. Mivel $q \neq 1$, így a $q = -\frac{1}{2}$ eset marad, ekkor $a, -\frac{a}{2}, \frac{a}{4}$ mértani sorozat, és a $a, \frac{a}{4}, -\frac{a}{2}$ sorrend számtani sorozat. A három szám közül a legnagyobb 4. A számtani sorozat $4, 1, -2$, illetve $-8, -2, 4$. ***3 pont***

A számtani sorozat $-2, 1, 4$ vagy $4, 1, -2$; illetve $4, -2, -8$ vagy $-8, -2, 4$. ***2 pont***

2. Mely a és b egész számokra lesz az $x^2 + ax + b = 0$ egyenletnek $a + b$ az egyik gyöke?

Megoldás. Az olyan a és b egész számokat keressük, amelyekre fennáll az $(a+b)^2 + a \cdot (a+b) + b = 0$ egyenlet. ***2 pont***

Tekinthetjük az egyenletet b-re, mint ismeretlenre nézve másodfokú egyenletnek: $b^2 + (3a+1) \cdot b + 2a^2 = 0$. Ha ennek van egész gyöke, akkor a diszkrimináns négyzetszám, azaz: $D = (3a+1)^2 - 4 \cdot 2a^2 = (a+3)^2 - 8 = n^2$, ahol n egész szám. ***2 pont***

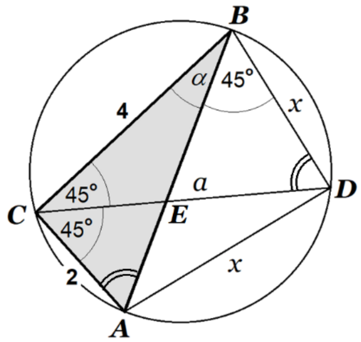
Az $(a+3)^2 - n^2 = 8$ diofantoszi egyenletet szorzattá alakítással is megoldhatjuk, de figyelhetünk arra is, hogy az egymást követő négyzetszámok közötti különbségek növekvő sorozatot alkotnak. Az 1, 4, 9, 16, 25, … sorozatban látjuk, hogy csak a 9 és az 1 különbsége 8. $(a+3)^2 = 9$, ezért $a = 0$ vagy $a = -6$. ***1 pont***

Az (a, b) megoldások: $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(-6, 8)$, $(-6, 9)$. ***4 pont***

Ellenőrzés: A $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(-6, 8)$, $(-6, 9)$ számpárokhoz tartozó egyenletek: $x^2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 - 6x + 8 = 0$, $x^2 - 6x + 9 = 0$, és ezeknek megoldása a megfelelő $a + b$ szám (0, -1, 2, illetve 3). ***1 pont***

3. Egy derékszögű háromszög befogói 2 és 4 egység hosszúak. Tekintsük a háromszög köré írt körnek azt a húrját, amely a derékszögű csúcsból induló szögfelezőre illeszkedik. Mekkora ez a húr?

1. megoldás. A derékszögű háromszög átfogója: $AB = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. ***1 pont***
CD a $BCA\angle$ szögfelezője, így $BCD\angle = ACD\angle = 45°$. ***1 pont***
A kerületi szögek tétele miatt $ABD\angle = ACD\angle = 45°$. ***1 pont***



Az *ABC* derékszögű háromszögben legyen $\alpha = ABC\angle$.
Ekkor $\sin\alpha = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ és $\cos\alpha = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. ***2 pont***
$2r = AB = 2\sqrt{5}$. ***1 pont***
A szinusztétel miatt $CD = 2r \cdot \sin(\alpha + 45°)$. ***1 pont***
Ezért $CD = 2\sqrt{5} \cdot (\sin\alpha \cdot \cos 45° + \cos\alpha \cdot \sin 45°)$, azaz
$CD = 2\sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}$. ***2 pont***
A keresett húr hossza $3\sqrt{2}$. ***1 pont***

2. megoldás. *CD* a $BCA\angle$ szögfelezője, így $BCD\angle = ACD\angle = 45°$ ezért $BD = AD = x$. ***2 pont***
Írjuk fel a koszinusztételt a *CAD* és a *CDB* háromszögekben az *x* hosszú oldalakra és legyen $a = CD$. ***2 pont***
$x^2 = 2^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ és ***2 pont***
$x^2 = 4^2 + a^2 - 2 \cdot 4a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$. ***2 pont***
Innen $4 + a^2 - 2a \cdot \sqrt{2} = 16 + a^2 - 4a \cdot \sqrt{2}$, azaz $2a \cdot \sqrt{2} = 12$, $a = 3\sqrt{2}$. ***1 pont***
A keresett húr hossza $3\sqrt{2}$. ***1 pont***

3. megoldás. Az *ACB* derékszögű háromszög átfogója: $AB = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$. ***1 pont***
CD a $BCA\angle$ szögfelezője, így $BCD\angle = ACD\angle = 45°$. ***1 pont***
A kerületi szögek tétele miatt $ABD\angle = ACD\angle = 45°$. ***1 pont***
Az *ADB* derékszögű háromszög egyik hegyesszöge $ABD\angle = 45°$, ezért egyenlő szárú. Az átfogója $AB = \sqrt{20}$, tehát a szárai $AD = BD = \sqrt{10}$. ***1 pont***
A *C* csúcsból induló szögfelező az átfogót az *E* pontban metszi, és a szögfelezőtétel miatt
$AE = \frac{\sqrt{20}}{3}$, $BE = \frac{2\sqrt{20}}{3}$. ***2 pont***
A kerületi szögek tétele miatt $CAE\angle = BDE\angle$. (Vagy $CEA\angle = BED\angle$.) ***1 pont***
A *CAE* és a *BDE* háromszögek hasonlók. ***1 pont***
A hasonlóság miatt $CE = \frac{4}{3}\sqrt{2}$, $DE = \frac{5}{3}\sqrt{2}$. ***1 pont***
$CD = CE + ED = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{5}{3}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. ***1 pont***

4. Mennyi az $A^2 + B^2 + C^2$ kifejezés lehetséges legkisebb értéke, ha *A*, *B*, *C* olyan nullától különböző egészek, melyekre $A \cdot \log_2 16 + B \cdot \log_2 18 + C \cdot \log_2 24 = 0$ teljesül?

Megoldás. Mivel $4A \cdot \log_2 2 + B \cdot (\log_2 2 + 2\log_2 3) + C \cdot (3\log_2 2 + \log_2 3) = 0$, így $(4A + B + 3C) \cdot \log_2 2 + (2B + C) \cdot \log_2 3 = 0$. ***2 pont***

Ha $2B + C \neq 0$, akkor $\log_2 3 = -\frac{4A+B+3C}{2B+C}$, azaz $3 = 2^{-\frac{4A+B+3C}{2B+C}}$, így $3^{2B+C} = 2^{-(4A+B+3C)}$. Ez nem lehetséges, hiszen a 3 és a 2 nullától különböző egész kitevős hatványai nem lehetnek egyenlők. ***3 pont***

Ezért $2B + C = 0$ és $4A + B + 3C = 0$. ***1 pont***

Az első egyenletből $C = -2B$, így $4A + B - 6B = 0$, vagyis $4A = 5B$. ***1 pont***

A osztható 5-tel, *B* osztható 4-gyel. ***1 pont***

Innen a legkisebb abszolút értékű *A*, *B*, *C* számok: $A = 5,\ B = 4,\ C = -8$. ***1 pont***

$A^2 + B^2 + C^2 = 5^2 + 4^2 + (-8)^2 = 105$. ***1 pont***

5. A Világkormány mindegyik tagja két nyelven beszél, és mindegyik kormánytaghoz található egy olyan kormánytag, akivel csak tolmács segítségével beszélhet, míg a többi tag mindegyikével tud egy közös nyelven beszélni. Hány tagja lehet a kormánynak?

Megoldás. A kormány mindegyik tagjához van egy másik, akivel nem tud közös nyelven beszélni. Válasszunk két olyan tagot, akiknek nincs közös nyelve: *A* beszéli a *p* és *q* nyelveket, *B* beszéli az *r* és *s* nyelveket. *A* mindenki mással talál közös nyelvet, és ugyanígy *B* is. Tehát a többi tag által beszélt két nyelv $(p,r), (p,s), (q,r), (q,s)$ lehet. Ha *C* és *D* ugyanazt a két nyelvet beszélné, akkor akivel *C* nem tud beszélni, legyen ő *E*, vele *D* sem tud beszélni. Ezért *E* két kollégájával csak tolmáccsal beszélhet, noha csak egy ilyen kolléga lehet. Tehát a kormánynak legfeljebb 6 tagja lehet: *A* és *B*, és azok, akik a $(p,r), (p,s), (q,r), (q,s)$ nyelveket beszélik.

Legfeljebb 6 kormánytag van: ***4 pont***.

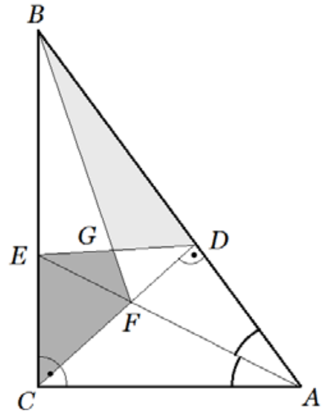
Válasszunk *A* és *B* mellé egy harmadik tagot, *M*-et, aki a (p,r) nyelveket beszéli. Mivel *M*-nek van olyan kollégája, akivel nem tud beszélni, így kell lennie negyedik tagnak is, *N* az, aki (q,s) nyelveken beszél. A kormánynak lehet 4 tagja: *A*, *B*, *M*, *N*.

Legalább 4 kormánytag van, és lehet 4 kormánytag: ***3 pont***.

Ha van 5 vagy 6 tagú kormány, az ötödik, illetve a hatodik tag a (p,s) és (q,r) nyelveket beszéli. 5 tag nem lehet, mert nincs hozzá olyan kormánytag, akivel nem tud beszélni. 6 tagja lehet a kormánynak, ekkor teljesülnek a feltételek.

A kormánytagok száma nem lehet 5, és lehet 6: ***3 pont***.

6. Az *ABC* derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó *CD* magasság és az *AE* szögfelező az *F* pontban metszik egymást. *ED* és *BF* metszéspontja *G*.



Mutassa meg, hogy a *CFGE* négyszög és a *DBG* háromszög területe egyenlő.

Megoldás. A szögfelezőtétel alapján: $\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AB} = \cos CAB\angle$. ***2 pont***

$\cos CAB\angle = \frac{AD}{AC} = \frac{FD}{FC}$, itt ismét felhasználva a szögfelezőtételt is. ***2 pont***

Innen $\frac{CE}{BE} = \frac{FD}{FC}$, azaz $EC \cdot FC = BE \cdot DF$. ***1 pont***

$EC \cdot FC = BE \cdot DF$, így $EC \cdot FC = (BC - EC) \cdot (CD - CF)$.
Ebből $CB \cdot CD = CB \cdot CF + CE \cdot CD$. ***2 pont***

Szorozzuk meg az egyenlőséget $\frac{1}{2}\sin BCD\angle$-vel, ekkor a $T_{BCD} = T_{BCF} + T_{ECD}$ egyenlőséget kapjuk. ***2 pont***

A *BCD* háromszöget *ED* és *BF* négy részre darabolja. Az előbbi területeket rakjuk össze ezekből.

$T_{ECFG} + T_{EGB} + T_{FGD} + T_{BGD} = (T_{ECFG} + T_{EGB}) + (T_{ECFG} + T_{FGD})$.

$T_{BGD} = T_{ECFG}$. ***1 pont***