

4 megye matematika versenye

12. évfolyam

1. Számítsuk ki az $\frac{x}{y}$ tört értékét, ha $2 \lg(x - 2y) = \lg x + \lg y$.
2. Bizonyítsuk be, hogy egy $2n$ jegyű csupa egyesből álló és n jegyű csupa kettes számjegyből álló természetes szám különbsége négyzetszám.
3. Az ABC háromszög két csúcsának koordinátái: $A(9;8)$ és $B(1;14)$. A C csúcshoz tartozó belső szögfelező egyenese illeszkedik az $y=2x$ egyenletű egyenesre. Számítsuk ki a háromszög beírt és körülírt körének sugarát.
4. Bizonyítsuk be, hogy ha az $a; b; c$ számok egy háromszög oldalhosszúságainak mérőszámai, s_c a c oldalhoz tartozó súlyvonal hosszának mérőszáma, akkor a
$$c^2 \cdot x^2 + (a^2 - b^2) \cdot x + s_c^2 = 0$$
egyenletnek nincs valós gyöke.
5. A 2023 négyjegyű szám első és második számjegye közé írjunk egy darab 1-et, a második és a harmadik számjegye közé két darab 1-et, végül a harmadik és negyedik számjegye közé három darab 1-et. Ezt az eljárást ismételjük véges sokszor. Pl. a második lépésben az elsőre kapott tízjegyű szám esetében rendre 1, 2, ..., 9 darab egyest írunk a számjegyek közé. Bizonyítsuk be, hogy az előző eljárást tetszőlegesen sokszor megismételve a kapott szám soha sem lesz osztható 3-mal.
6. Egy 5 cm hosszúságú szakasz mellé választunk véletlenszerűen két kisebb hosszúságú szakaszt. Feltéve, hogy a három szakaszból szerkeszthető háromszög, mennyi a valószínűsége, hogy ez a háromszög tompaszögű?

Mindegyik feladat 10 pontot ér.

Janus Pannonius Gimnázium, Pécs

2023. január 27.