Javítási útmutató

12. évfolyamosok versenye

1. Számítsuk ki az $\frac{x}{y}$ tört értékét, ha $2\lg(x-2y)=\lg x+\lg y$.

Megoldás:

A logaritmus értelmezéséből $x>2y>0$, vagyis $\frac{x}{y}>2$–nek kell teljesülnie. (2 pont)

A logaritmus azonosságai szerint az egyenlet $\lg(x-2y)^2=\lg(xy)$ alakba írható.(2 pont)

A logaritmus függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért

$$(x-2y)^2=xy$$ (1 pont)

A műveletek elvégzése és rendezés után

$$x^2-5xy+4y^2=0$$ (1 pont)

Mindkét oldalt osztva $y^2\neq 0$–val:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-5\left(\frac{x}{y}\right)+4=0$$ (1 pont)

Ennek az $\frac{x}{y}$ -ra nézve másodfokú egyenletnek a gyökei $\frac{x}{y}=4$ és $\frac{x}{y}=1$. (2 pont)

Kikötéseink szerint az utóbbi nem lehet megfelelő, tehát $\frac{x}{y}=4$. (1 pont)

Összesen: **10 pont**

2. Bizonyítsuk be, hogy egy 2*n* jegyű csupa egyesből álló és *n* jegyű csupa kettes számjegyből álló természetes szám különbsége négyzetszám.

Megoldás:

Legyen $N=11\ldots111-22\ldots222$, ahol az egyesek száma 2*n*, a kettesek száma *n*. Írjuk fel *N*-et helyi értékes alakban. Ekkor (2 pont)

$N=(10^{2n-1}+\cdots+10+1)-2\cdot(10^{n-1}+\cdots+10+1)$ (2 pont)

Összegezzük a zárójelekben lévő összegeket, mint $q=10$ hányadosú mértani sorozatokat, ekkor

$N=\frac{10^{2n}-1}{9}-2\frac{10^{n}-1}{9}=\left(\frac{10^{n}-1}{3}\right)^2.$ (3 pont)

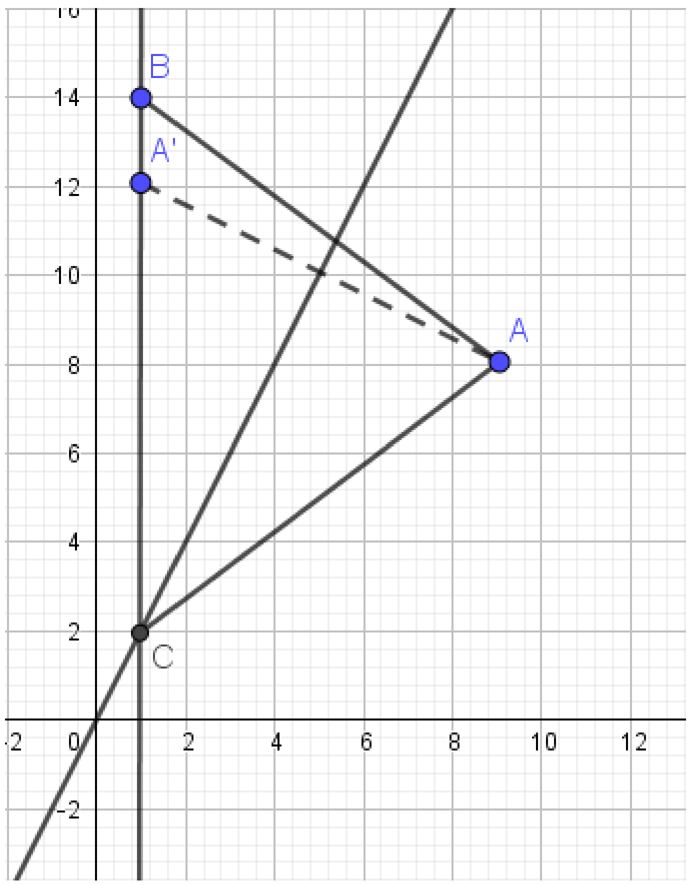
Ez valóban négyzetszám, mivel 10^n-1 minden jegye 9-es, ezért osztható 3-mal, tehát egész szám négyzete, egy csupa hármasból álló n-jegyű szám négyzete. (3 pont)

Összesen: **10 pont**

3. Az *ABC* háromszög két csúcsának koordinátái: *A*(9;8) és *B*(1;14). A *C* csúcshoz tartozó belső szögfelező egyenese illeszkedik az *y*=2*x* egyenletű egyenesre. Számítsuk ki a háromszög beírt és körülírt körének sugarát.

Megoldás:

Készítsünk ábrát!



Az $y = 2x$ szögfelezőegyenes az *ACB* szögtartomány szimmetriatengelye. (1 pont)

Az $y = 2x$ szögfelezőegyenesre tükrözzük pl. az *A* csúcsot, melynek *A'* tükörképe illeszkedik *BC* oldalegyenesére. (1 pont)

Az *AA*' merőleges $y = 2x$-re, így meredeksége -0,5. Az *AA*' egyenlete: $y = -0{,}5 \cdot (x - 9) + 8$, azaz $y = -0{,}5 \cdot x + 12{,}5$. (1 pont)

Az $y = 2x$ és *AA*' metszéspontja az $y = 2x$ és az $y = -0{,}5 \cdot x + 12{,}5$ egyenletrendszer megoldása: $x = 5, y = 10$. Innen *A'*(1;12) (2 pont)

A *BA*' egyenlete: $x = 1$, melynek az $y = 2x$ egyenessel való metszéspontja *C*(1;2). (1 pont)

Az *ABC* háromszög oldalhosszai: $AB = AC = 10, BC = 12$. (1 pont)

A háromszög területe: $t = (12 \cdot 8) : 2 = 48$, félkerülete $s = 16$. (1 pont)

A háromszög beírt körének sugara: $r = \frac{t}{s} = 3$. (1 pont)

A háromszög köré írt körének sugara: $R = \frac{(AB \cdot AC \cdot BC)}{4t} = \frac{1200}{192} = \frac{25}{4}$. (1 pont)

Összesen: **10 pont**

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az a; b; c számok egy háromszög oldalhosszúságainak mérőszámai, s_c a c oldalhoz tartozó súlyvonal hosszának mérőszáma, akkor a

$$c^2 \cdot x^2 + (a^2 - b^2) \cdot x + s_c^2 = 0$$

egyenletnek nincs valós gyöke.

Megoldás:

Az egyenlet másodfokú, mert $c^2 > 0$, így az egyenlet diszkriminánsáról kell megmutatni, hogy az negatív, ami $D = (a^2 - b^2)^2 - 4 \cdot c \cdot s_c^2$. (1 pont)

Felhasználjuk, hogy $s_c^2 = \frac{(2a^2 + 2b^2 - c^2)}{4}$. (2 pont)

Ez alapján $D = (a^2 - b^2)^2 - c^2 \cdot (2a^2 + 2b^2 - c^2) = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2c^2a^2 - 2c^2b^2$, ahonnan

$D = (a^2 + b^2 - c^2)^2 - (2ab)^2$ (3 pont)

Ezt szorzattá alakítva: $D = (a^2 + b^2 + 2ab - c^2) \cdot (a^2 + b^2 - 2ab - c^2)$. (1 pont)

Tovább alakítva:

$D = [(a + b)^2 - c^2] \cdot [(a - b)^2 - c^2] =$

$= (a + b + c) \cdot (a + b - c) \cdot (a - b + c) \cdot (a - b - c)$ (2 pont)

Az első három tényező pozitív (háromszög egyenlőtlenség), a negyedik az előző miatt negatív, tehát a másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, így nincs valós megoldása. (1 pont)

Összesen: **10 pont**

5. A 2023 négyjegyű szám első és második számjegye közé írjunk egy darab 1-est, a második és a harmadik számjegye közé két darab 1-est, végül a harmadik és negyedik számjegye közé három darab 1-est. Ezt az eljárást ismételjük véges sokszor. Pl. a második lépésben az elsőre kapott tízjegyű szám esetében rendre 1, 2, …, 9 darab egyest írunk a számjegyek közé. Bizonyítsuk be, hogy az előző eljárást tetszőlegesen sokszor megismételve a kapott szám soha sem lesz osztható 3-mal.

Megoldás:

A megadott eljárást követve elsőként a 2101121113 számot hozzuk létre, ez biztosan nem osztható 3-mal, mert számjegyeinek összege 13, ez pedig nem osztható 3-mal. (1 pont)

A továbbiakban bizonyítani fogjuk, hogy ha egy lépésben az 1-esek számának száma (és ezzel az összege is) 3-mal osztható, akkor a következő lépésben megint osztható lesz. Ebből már következik a feladat állítása, hiszen az első lépésben az 1-esek számának összege 6, a 2101121113 szám pedig 3-mal nem osztható, ha ehhez a következő lépésben (és minden továbbiban) 3-mal osztható darabszámú 1-est írunk a megadott szabályok alapján, akkor a következő számok egyike sem lesz osztható 3-mal. (2 pont)

Tegyük fel, hogy egy lépés végrehajtása után a kapott számban k számú 1-es van, ahol $k \in N^+$. Ekkor a kapott számnak k+4 darab jegye van az eredeti 2023 szám négyszámjegyével együtt, ez pedig k+3 olyan helyet jelent, ahova az eljárás szerint a következő lépésben 1-eseket tehetünk. (2 pont)

Ki kell tehát számítanunk egy olyan számtani sorozat első k+3 tagjának összegét, amelyben $a_1 = 1$ és $d = 1$, hiszen két szomszédos számjegy közé mindig 1-gyel növekvő számú 1-est teszünk egy részlépés végrehajtása során. A számtani sorozat összegképlete alapján $S_{k+3} = \frac{2+k+2}{2} \cdot (k+3)$, azaz $S_{k+3} = \frac{(k+4)(k+3)}{2}$ (1 pont)

Ha a k szám 3-mal osztható, akkor felírható $k = 6m$, vagy $k = 6m + 3$ alakban, ahol $m \in N^+$ ($m = 0$ nem lehet, mert sem 0 darab, sem 3 darab 1-es az eljárás során nem keletkezik.) (1 pont)

Így

$$S_{k+3} = \frac{(6m+4)\cdot(6m+3)}{2} = 3 \cdot (3m+2) \cdot (2m+1), \text{vagy}$$

$$S_{k+3} = \frac{(6m+7)\cdot(6m+6)}{2} = 3 \cdot (6m+7) \cdot (m+1).$$

Látható, hogy S_{k+3} mindkét esetben 3-mal osztható. Ezzel beláttuk, hogy ha egy lépés során k darab 1-es szerepel egy számban és ez a k 3-mal osztható, akkor a következő lépésben az 1-esek darabszáma egy 3-mal osztható számmal növekszik. Vagyis, ha első alkalommal a kapott szám 3-mal nem volt osztható, mert a számjegyek összege nem volt osztható 3-mal, akkor a következő lépésben, és egyetlen további lépésben sem lesz a kapott szám 3-mal osztható. (3 pont)

Összesen: **10 pont**

6. Egy 5 cm hosszúságú szakasz mellé választunk véletlenszerűen két kisebb hosszúságú szakaszt. Feltéve, hogy a három szakaszból szerkeszthető háromszög, mennyi a valószínűsége, hogy ez a háromszög tompaszögű?

Megoldás:

A megoldáshoz a geometriai valószínűségszámítási modellt használjuk, azzal a feltétellel, hogy a három szakaszból szerkeszthető háromszög.

A három szakasz: $0 < x < 5, 0 < y < 5$ és az 5 akkor és csak akkor határoz meg egy háromszöget, ha a leghosszabb oldalra is teljesül a háromszög-egyenlőtlenség:

$x + y > 5.$ (1 pont)

Az x és y oldalak hosszainak feleltessük meg a derékszögű koordináta-rendszer egy $P(x;y)$ pontját. (1 pont)

Tekintsük először a fenti egyenlőtlenségek megoldásait a koordináta-síkon. Ezek az 5 egység oldalú négyzet (*ABCD*) az ábrán jelölt átlója feletti háromszögbe (*ABC*) eső pontjai. (1 pont)

A háromszög leghosszabb oldala az 5, ezért ezzel szemben van a legnagyobb szög. (1 pont)

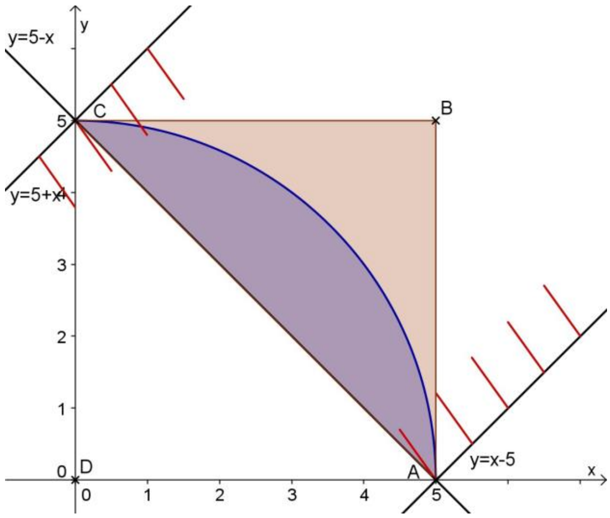
Írjuk fel a koszinusztételt erre a szögre (α): $5^2 = x^2 + y^2 - 2xycos\alpha$. (1 pont)

$\alpha > 90°$ esetén $2xycos\alpha < 0$, így $x^2 + y^2 < 25$ esetén lesz a háromszög tompaszögű. (1 pont)

Az $x^2 + y^2 < 25$ feltételnek az origó középpontú, 5 egység sugarú kör belső pontjai felelnek meg. (1 pont)

A feladat megoldása szempontjából kedvező pontok a négyzet átlója és az átló két végpontja által meghatározott körív között található körszelet pontjai lesznek. (1 pont)

Lásd ábra!



Alkalmazzuk a geometria valószínűséget a kedvező és a lehetséges eseteket megadó pontok által meghatározott síkidomok területére: $T_{\text{kedvező}} = \frac{5^2\pi}{4} - \frac{5^2}{2}$, $T_{\text{összes}} = \frac{5^2}{2}$ (1 pont)

A keresett valószínűség értéke: $P(\text{tompaszögű}) = \frac{\frac{5^2}{4}(\pi-2)}{\frac{5^2}{2}} = \frac{\pi-2}{2} \approx 0{,}57$ (1 pont)

Összesen: **10 pont**