Javítási útmutató

11. évfolyamosok versenye

1. Egy banketten 100 ember vesz részt. A résztvevők átlagosan 3,14 embert ismernek a társaságból, az ismeretség minden esetben kölcsönös.

a) Hány ismeretségi kapcsolat van a társaságban?
b) Igaz–e, hogy a társaságban van olyan ember, aki legalább 4 másik embert ismer?

Megoldás:

a) A bankett résztvevőit az ismeretségi kapcsolatokkal együtt egy 100 pontú egyszerű gráfnak tekinthetjük. (2 pont)

A pontok fokszámainak átlaga 3,14, vagyis a fokszámok összege 314. Az egyszerű gráf éleinek száma és a fokszámok összegére vonatkozó összefüggés alapján 314:2 = 157 az élek, vagyis az ismeretségek száma. (3 pont)

Megjegyzés: Az első 2 pont akkor is jár, ha nem gráfokkal fogalmaz a versenyző.

b) Tegyük fel, hogy mindegyik részvevő legfeljebb három másikat ismer. (2 pont)

Ekkor az ismeretségek maximuma (100·3):2 = 150, ami ellentmond az a)-beli eredményünknek. (2 pont)

Tehát biztosan van olyan ember, aki legalább 4 másikat ismer. (1 pont)

Összesen: **10 pont**

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$(x-4)\cdot(x-2)\cdot(x+5)\cdot(x+7)\leq -81$$

egyenlőtlenséget.

Megoldás:

Az egyenlőtlenség baloldalán cseréljük meg a tényezők sorrendjét:

$(x-4)\cdot(x+7)\cdot(x+5)\cdot(x-2)\leq -81.$ (2 pont)

Ezután a tényezőket páronként összeszorozva az

$(x^2+3x-28)\cdot(x^2+3x-10)\leq -81$ egyenlőtlenséget kapjuk. (2 pont)

Jelölje y az x^2+3x-et! Ezt az egyenlőtlenségbe írva:

$(y-28)\cdot(y-10)\leq -81.$ (1 pont)

A műveleteket elvégezve és rendezve az $y^2-38y+361\leq 0$ egyenlőtlenséghez jutunk. (1 pont)

A baloldal egy teljes négyzet, így $(y-19)^2\leq 0.$ (1 pont)

Ez csak úgy lehetséges, ha $x^2 + 3x - 19 = 0$. (1 pont)

Az egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{-3+\sqrt{85}}{2}$ és $x_2 = \frac{-3-\sqrt{85}}{2}$. (1 pont)

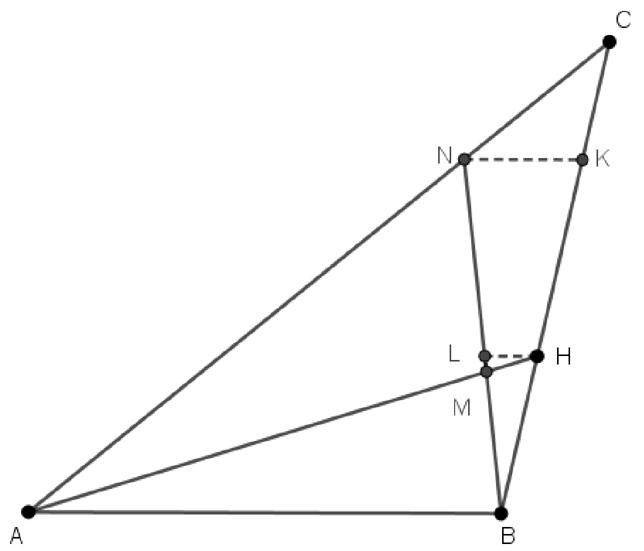
Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk ezért a két gyök az eredeti egyenlőtlenségnek is megoldása. (1 pont)

Összesen: **10 pont**

3. Az *ABC* háromszög *BC* oldalának a *H* olyan belső pontja, melyre *BH*:*HC* = 1:2. Az *AC* oldalnak *N* olyan belső pontja, melyre *CN*:*NA* = 1:3. Jelöljük *BN* és *AH* metszéspontját *M*-mel. Hányadrésze az *NMHC* négyszög területe az *ABC* háromszög területének?

Megoldás:

Készítsünk ábrát, és jelöljük *AB*-t *c*-vel és *BC*-t *a*-val.



Húzzunk párhuzamost *H*-n és *N*-en keresztül *AB*-vel, a metszéspontok *K* és *L*. (2 pont)

Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az *ACB* szögre (*AB* = *c*): *NK* = $\frac{c}{4}$. (1 pont)

Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az *NBK* szögre: *HL*:*NK* = *HB*:*BK*, ahonnan: (1 pont)

$HL = \frac{c}{4} \cdot \frac{\frac{1}{3}a}{\frac{3}{4}a} = \frac{c}{9}$. (2 pont)

Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét az *AMB* szögre: $HM{:}MA = \frac{\frac{c}{9}}{c} = \frac{1}{9}$. (2 pont)

A közös magassággal rendelkező háromszögek területének aránya egyenlő az ezen magassághoz tartozó oldalak arányával. Ez alapján: $T_{BHM} = \frac{1}{10} T_{ABH} = \frac{1}{30} T_{ABC}$.
(1 pont)

Ezek alapján: $T_{MHCN} = \frac{1}{4} T_{ABC} - \frac{1}{30} T_{ABC} = \frac{13}{60} T_{ABC}$. (1 pont)

Megjegyzés: Háromszögek hasonlóságát felhasználva ugyanezt kapjuk.

Összesen: **10 pont**

4. Az $f(x)$ függvény a valós számok halmazán értelmezett olyan másodfokú függvény, amely minden x valós számra eleget tesz a $2f(x) + f(3-x) = x^2$ egyenlőségnek. Hány olyan természetes szám van, amely nem nagyobb 2025-nél és $f(x) > \frac{7}{3}$?

Megoldás:

Mivel minden valós x-re teljesül a $2f(x) + f(3-x) = x^2$ (1) egyenlőség, ezért annak is teljesülnie kell, hogy

$2f(3-x) + f[3-(3-x)] = (3-x)^2$ (2),

azaz $2f(3-x) + f(x) = x^2 - 6x + 9$ (2). (2 pont)

Az (1) egyenlet kétszereséből kivonva a (2)-öt kapjuk, hogy

$3f(x) = x^2 + 6x - 9$. (2 pont)

Ebből $f(x) = \frac{x^2 + 6x - 9}{3}$ a megfelelő másodfokú függvény. (1 pont)

Oldjuk meg az $\frac{x^2 + 6x - 9}{3} > \frac{7}{3}$ egyenlőtlenséget (1 pont)

Rendezés után az $x^2 + 6x - 16 > 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, melyet szorzattá alakítva

$(x-2) \cdot (x+8) > 0$. (1 pont)

Az egyenlőtlenség megoldása: $x < -8$, vagy $x > 2$. (1 pont)

A kérdéses természetes számok $2 < x \leq 2025$. (1 pont)

Tehát 2023 olyan természetes van, amely eleget tesz a feltételeknek. (1 pont)

Összesen: **10 pont**

5. Az x valós számra teljesül, hogy $\cos(\frac{\pi}{2} \cdot sinx) = sin(\pi \cdot sinx)$. Határozzuk meg $\sin x$ összes lehetséges értékét!

Megoldás:

A pótszögekre vonatkozó azonosság alapján az egyenlet a $sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot sinx) = sin(\pi \cdot sinx)$ egyenlettel ekvivalens. (1 pont)

Két valós szám szinusza egyenlő, ha a valós számok különbsége 2π egész számú többszöröse, illetve ha összegük $\pi + m \cdot 2\pi$, ahol $m \epsilon Z$. (1 pont)

A fentiek alapján:

(1) $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot sinx = \pi \cdot sinx + k \cdot 2\pi, k\epsilon Z$

(2) $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot sinx + \pi \cdot sinx = \pi + m \cdot 2\pi, m\epsilon Z$ (2 pont)

Az egyenletekből $sinx$-et kifejezve:

(1) $sinx = \frac{(1-4k)}{3}$. (1 pont)

Mivel $-1 \leq sinx \leq 1$, ezért $-3 \leq 1 - 4k \leq 3$, ahonnan $-\frac{1}{2} \leq k \leq 1$. Mivel k egész szám, ezért $k = 0$; 1 lehet. Így $sinx = \frac{1}{3}$, vagy $sinx = -1$ (2 pont)

(2) $sinx = 1 + 4m$. (1 pont)

A szinusz függvény értékkészletét figyelembe véve $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$, ami csak $m = 0$ esetén teljesül, ekkor $sinx = 1$. (1 pont)

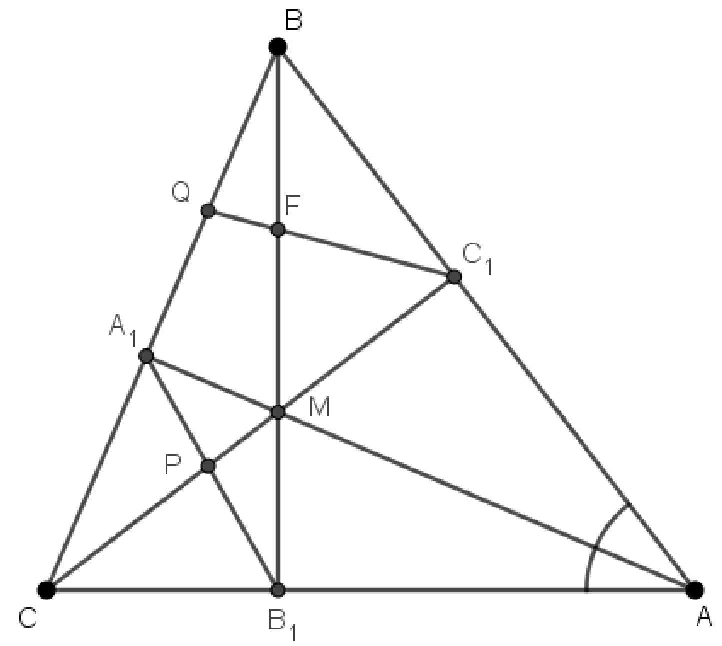
Összegezve: a kiindulási egyenletben $sinx = -1; \frac{1}{3}; 1$ értékeket veheti fel. (1 pont)

Összesen: **10 pont**

6. Az *ABC* hegyesszögű háromszög *A, B, C* csúcsaiból induló magasságok talppontjai rendre A_1, B_1, C_1. Jelölje *M* a háromszög magasságpontját, *F* a *BM* szakasz felezőpontját. Az A_1B_1 szakasz CC_1-et *P*-ben, C_1F a *BC*-t *Q*-ban metszi. Bizonyítsuk be, hogy A_1PC_1Q négyszög húrnégyszög.

Megoldás:

Készítsünk ábrát!



AB Thalész-körére illeszkedik A_1, B_1, az ABA_1B_1 négyszög húrnégyszög, ezért $CA_1B_1\measuredangle = \alpha$. (2 pont)

B_1MA_1C húrnégyszög. CM Thalész-körére illeszkedik B_1, A_1. (2 pont)

Az A_1-ből és M-ből CB_1 ugyanakkora szög alatt látszik, így $CMB_1\measuredangle=\alpha$, amivel egyenlő $BMC_1\measuredangle$ (csúcsszögek). (3 pont)

MC_1B derékszögű háromszögben F az MB felezőpontja, így $MF=FC_1$, ezért $MC_1F\measuredangle = \alpha$ és $QA_1P\measuredangle = 180^\circ - \alpha$. (2 pont)

Tehát az A_1PC_1Q négyszög két szemközti szögének összege 180°, így az húrnégyszög. (1 pont)

Összesen: 10 pont