4 megye matematika versenye

11. évfolyam

1. Egy banketten 100 ember vesz részt. A résztvevők átlagosan 3,14 embert ismernek a társaságból, az ismeretség minden esetben kölcsönös.

a) Hány ismeretségi kapcsolat van a társaságban?
b) Igaz–e, hogy a társaságban van olyan ember, aki legalább 4 másik embert ismer?

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$(x-4)\cdot(x-2)\cdot(x+5)\cdot(x+7)\leq -81$$

egyenlőtlenséget.

3. Az *ABC* háromszög *BC* oldalának a *H* olyan belső pontja, melyre *BH*:*HC* = 1:2. Az *AC* oldalnak *N* olyan belső pontja, melyre *CN*:*NA* = 1:3. Jelöljük *BN* és *AH* metszéspontját *M*-mel. Hányadrésze az *NMHC* négyszög területe az *ABC* háromszög területének?

4. Az $f(x)$ függvény a valós számok halmazán értelmezett olyan másodfokú függvény, amely minden x valós számra eleget tesz a $2f(x)\ +f(3-x)=x^2$ egyenlőségnek. Hány olyan természetes szám van, amely nem nagyobb 2025-nél és $f(x)>\frac{7}{3}$?

5. Az x valós számra teljesül, hogy $cos(\frac{\pi}{2}\cdot sinx)=sin(\pi\cdot sinx)$. Határozzuk meg $\sin x$ összes lehetséges értékét.

6. Az *ABC* hegyesszögű háromszög *A, B, C* csúcsaiból induló magasságok talppontjai rendre A_1, B_1, C_1. Jelölje *M* a háromszög magasságpontját, *F* a *BM* szakasz felezőpontját. Az A_1B_1 szakasz CC_1-et *P*-ben, C_1F a *BC*-t *Q*-ban metszi. Bizonyítsuk be, hogy A_1PC_1Q négyszög húrnégyszög.

Mindegyik feladat 10 pontot ér.

Janus Pannonius Gimnázium, Pécs

2023. január 27.