11. évfolyam gimnázium

1. Egy banketten a meghívottak kézfogással üdvözlik egymást (mindenki mindenkivel pontosan egyszer fog kezet). Az üdvözlések során egy adott pillanatban kiderül, hogy még mindenkinek négy kézfogása van hátra és eddig 168 kézfogás történt. Hány résztvevője van a bankettnek?

2. Egy trapéz alapjai 12 cm és 8 cm hosszúak. Az egyik átló 30º-os szöget zár be az alappal és merőleges a másik átlóra.

a) Hány cm hosszú a trapéz két átlója?

b) Mekkora a trapéz területe?

3. Adva van egy 2022 oldalú konvex sokszög és belsejében 11 pont úgy, hogy a sokszög csúcsai és a 11 pont közül semelyik három nincs egy egyenesen. Felhasználva a sokszög csúcsait és a 11 pontot, bontsuk fel a sokszöget olyan háromszögekre, amelyeknek csúcsai az előbbi 2033 pont közül valók. Hány háromszöget kapunk?

4. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $x^2y-4x^3=2023$ az egész számok halmazán.

b) $x^2-y^2-2x=10$ a természetes számok halmazán.

5. Egy csupa fiúból álló osztályban 18-an sakkoznak, 23-an fociznak, 21-en bicikliznek és 17-en túráznak. Tudjuk, hogy 9 olyan fiú van, aki sakkozik és focizik 7, aki sakkozik és biciklizik, 6, aki sakkozik és túrázik, 12, aki biciklizik és focizik, 9-en fociznak és túráznak és 12-en vannak, akik bicikliznek és túráznak is. A sakkot a biciklizést és a focit 4-en, a sakkot a focit és a túrázást 3-an, a sakkot a biciklizést és a túrázást 5-en, a focit a biciklizést és a túrázást 7-en tekintik kedvenc szabadidős elfoglaltságuknak. Van három olyan fiú, aki mindegyik sportnak hódol. Tudjuk végül, hogy a négy közül legalább az egyiket mindegyik fiú űzi. Hány fiú van az osztályban?

6. Tekintsük az $x^2+2(m-2)x+m^2-4m-21=0$ másodfokú egyenletet, ahol m valós paraméter.

a) Bizonyítsuk be, hogy az egyenlet valós gyökeinek különbsége nem függ m-től!

b) Határozzuk meg m azon értékét, melyre az egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege minimális!

Minden feladat megoldása 10 pontot ér.

11. évfolyam technikum

1. Egy csokoládégyárban két gépsoron 2012. november 5-én kezdték el gyártani a 85 gramm tömegű csokimikulásokat. A gyártás utolsó fázisában megmérik minden csokimikulás tömegét és, ha annak tömege kevesebb, mint 83 gramm, akkor csomagolás nélkül visszakerül az olvasztóba. Az első nap a két gépsoron összesen 26400 csokimikulást gyártottak, amiből 636-ot nem csomagoltak be. Az egyik gépsoron gyártott mikulások 2%-a, míg a másikon gyártott mikulások 3%-a volt selejtes. Hány selejtes mikulást gyártottak az egyik, illetve a másik gépsoron?

2. Egy banketten a meghívottak kézfogással üdvözlik egymást (mindenki mindenkivel pontosan egyszer fog kezet). Az üdvözlések során egy adott pillanatban kiderül, hogy még mindenkinek négy kézfogása van hátra és eddig 168 kézfogás történt. Hány résztvevője van a bankettnek?

3. Feldarabolható-e egy szabályos háromszög

a) 2022 szabályos háromszögre?

b) Bizonyítsuk be, hogy a szabályos háromszög felbontható 6, illetve 8 szabályos háromszögre is.

4. Adott az $\frac{a}{b}$ tört, ahol *a, b* pozitív egész számok. Ha a tört számlálóját 7-tel növeljük és a nevezőjét 7-tel csökkentjük, akkor az $\frac{a}{b}$ tört reciprokát kapjuk. Hány ilyen tört van, amelyre $\frac{b}{a} > \frac{290}{289}$?

5. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 20 cm, szárai 26 cm hosszúak. Mekkora a súlypontnak a háromszög oldalaitól mért távolsága?

6. Számítsa ki a

$$\frac{2022^2 - 2021^2 + 2020^2 - 2019^2 + \ldots + 2^2 - 1^2}{2022 - 2021 + 2020 - 2019 + \ldots + 2 - 1}$$

pontos értékét!

Minden feladat megoldása 10 pontot ér.

12. évfolyam gimnázium

1. Egy szabályos dobókockával ötször dobunk egymás után és sorban leírjuk a dobott pöttyök számát, ezzel így ötjegyű számsorozatot kapunk.

a) Hányféle számsorozatot kaphatunk?

b) Hányféle olyan sorozatot kaphatunk, melyekben pontosan egy kettes szerepel?

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első helyen, a többi helyen álló számtól különböző szám áll?

2. Az egységnyi oldalú *ABCD* négyzet belső *P* pontjára teljesül, hogy $PAB\sphericalangle = 15^{\circ}$ és $PBA\sphericalangle = 30^{\circ}$. A négyzet középpontját *O*-val jelölve, mekkorák *az APO* háromszög szögei?

3. Az *ABC* háromszög *C* csúcsból induló belső szögfelezője illeszkedik az $y = x$ egyenesre. Határozzuk meg a háromszög *C* csúcsának koordinátáit, ha *A*(12;-1) és *B*(6;14)!

4. Tekintsük az $f: R \to R,\ f(x) = (p-2)x^2 + (2p+1)x + \frac{3}{4}p + 2$ másodfokú függvényeket, ahol *p* 2-től különböző valós szám.

a) Van-e a *p* paraméternek olyan értéke, amelyre a másodfokú függvénynek nincs közös pontja az *x* tengellyel?

b) Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyekre a *p* lehetséges értékeihez tartozó függvények mindegyike illeszkednek!

c) Határozzuk meg *p* értékét úgy, hogy a $(p-2)x^2 + (2p+1)x + \frac{3}{4}p + 2 = 0$ egyenlet gyökeinek a négyzetösszege $\frac{5}{2}$ legyen!

5. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet!

$$\left(\sin^2 x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y^2 + \cos x\right)^2 = 0$$

6. Hány olyan *x* valós szám van, amelyre a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1024} - \sqrt{x^2 + 1}$$

függvény egész értéket vesz fel?

Minden feladat megoldása 10 pontot ér.

12. évfolyam technikum

1. Határozzuk meg azokat a háromjegyű számokat, amelyek egyenlők számjegyei összegének a 23-szorosával.

2. Egy banketten a meghívottak kézfogással üdvözlik egymást (mindenki mindenkivel pontosan egyszer fogott kezet). Két meghívott más elfoglaltsága miatt nem tudott részt venni a banketten, így a lehetséges kézfogások száma 35-tel csökkent. Hány embert hívtak meg a bankettre?

3. Egy szabályos dobókockával ötször dobunk egymás után és sorba leírjuk a dobott pöttyök számát, így ötjegyű számsorozatot kapunk.

a) Hányféle számsorozatot kaphatunk?

b) Hányféle sorozatot kaphatunk, melyekben pontosan egy kettes szerepel?

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első helyen, a többi helyen álló számtól különböző szám áll?

4. Az ABC háromszögben az AB oldal kétszer olyan hosszúságú, mint az AC oldal. Tudjuk, hogy a C pont ugyanolyan távol van az AB oldal egyenesétől, mint a B pont a C pontból induló súlyvonal egyenesétől. Mekkorák az ABC háromszög szögei?

5. Háromszögszámoknak nevezzük a $h_1 = 1,\ h_2 = 1+2,\ h_3 = 1+2+3,\ \ldots,\ h_n = 1+2+3+\ldots+n$, stb. számokat. Számítsuk ki az első 2022 háromszögszám reciprokának az összegét!

6. Az $ABCD$ trapéz AC és BD átlói az M pontban metszik egymást. Az ABM és ADM háromszögek területének aránya $8:7$. Mekkora a trapéz területe, ha a CDM háromszög területe 2023 területegység?

Minden feladat megoldása 10 pontot ér.

11. évfolyam gimnázium

Pontozási útmutató

1. Egy banketten a meghívottak kézfogással üdvözlik egymást (mindenki mindenkivel pontosan egyszer fog kezet). Az üdvözlések során egy adott pillanatban kiderül, hogy még mindenkinek négy kézfogása van hátra és eddig 168 kézfogás történt. Hány résztvevője van a bankettnek?

Megoldás:

Ha n résztvevő van, akkor mindenki n - 1 kézfogást ad. (2 pont)
Mivel az adott pillanatban mindenkinek még 4 kézfogása van hátra, ezért eddig mindenki n – 5 kézfogást adott, így (3 pont)

$$\frac{n(n-5)}{2}=168 \qquad \text{(2 pont)}$$

$$n^2-5n-336=0 \qquad \text{(1 pont)}$$

Az egyenlet pozitív megoldása a 21.
Tehát 21 résztvevője van a bankettnek. (1 pont)
Ellenőrzés (1 pont)

Összesen: 10 pont

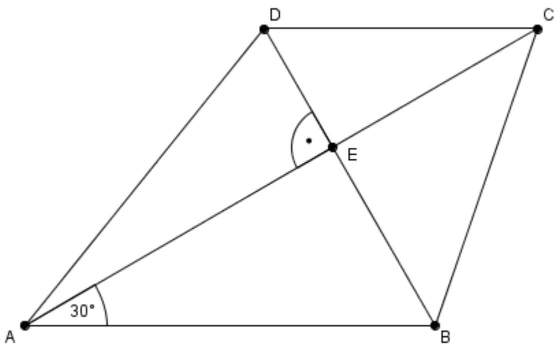
2. Egy trapéz alapjai 12 cm és 8 cm hosszúak. Az egyik átló 30°-os szöget zár be az alappal és merőleges a másik átlóra.

a) Hány cm hosszú a trapéz két átlója?

b) Mekkora a trapéz területe?

Megoldás:

a) Készítsünk ábrát, és használjuk annak jelöléseit!



Az ABE háromszög A-nál lévő szöge 30°-os, ezért EB = 6 cm. (2 pont)
Az AE = $\sqrt{3}\cdot 6$ cm. (1 pont)
A DCE háromszögben C-nál lévő szöge 30°-os, ezért ED = 4 cm. (2 pont)
Az CE = $\sqrt{3}\cdot 4$ cm. (1 pont)

Így BD = 10 cm, $AC = \sqrt{3} \cdot 10$ cm. (2 pont)

b) Mivel a trapéz átlói merőlegesek egymásra ezért a területe:

$\dfrac{AC \cdot BD}{2} = 50 \cdot \sqrt{3}$ cm^2. (2 pont)

Összesen: **10 pont**

3. Adva van egy 2022 oldalú konvex sokszög és belsejében 11 pont úgy, hogy a sokszög csúcsai és a 11 pont közül semelyik három nincs egy egyenesen. Felhasználva a sokszög csúcsait és a 11 pontot, bontsuk fel a sokszöget olyan háromszögekre, amelyeknek csúcsai az előbbi 2033 pont közül valók. Hány háromszöget kapunk?

Megoldás:

Ha egy pontot helyezünk el a sokszög belsejében és azt összekötjük a sokszög csúcsaival, akkor 2022 db háromszöget kapunk. (1 pont)

Ha a második pontot is elhelyezzük, akkor ez valamelyik háromszögben lesz (oldalon nem lehet, mert akkor három pont egy egyenesre illeszkedne). (2 pont)

Ezt a pontot összekötve a háromszög csúcsaival, a háromszög „megszűnik”, de három új keletkezik. (2 pont)

Így folytatva minden pont elhelyezésével (az első kivételével) kettővel nő a háromszögek száma. Az összes háromszög: 2022 + (11 – 1)·2 = 2042. (2 pont)

Megmutatjuk, hogy a felbontások száma független a felbontás részleteitől. Ha a felbontás után N háromszöget kapunk, akkor az N darab háromszög belső szögeinek összege az eredeti sokszög belső szögei, illetve azoknak részeiből, továbbá a belső pontoknál fekvő teljes szögek részeiből tevődnek össze. A 2022 oldalú sokszög szögeinek összege és a 11 belső pontnál fekvő teljes szögek összege pontosan megadja az N darab háromszög belső szögeinek összegét. (2 pont)

$N \cdot 180° = (2022 - 2)180° + 11 \cdot 360°$.

Ebből N=2020+22=2042. Független a felbontás részleteitől. (1 pont)

Összesen: **10 pont**

4. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $x^2y - 4x^3 = 2023$ az egész számok halmazán.

b) $x^2 - y^2 - 2x = 10$ a természetes számok halmazán.

Megoldás:

a) Írjuk fel a baloldali összeget szorzatalakban:

$x^2(y - 4x) = 2023$ (1 pont)

Bontsuk fel a 2023-at két egész szám szorzatára, melyek közül az egyik négyzetszám. (1 pont)

2023 = 1*2023 = 17^2*7 (1 pont)

A két felbontásból: $x_1 = \pm 1$, $y_1 = 2023$; $x_2 = \pm 17$, $y_2 = 75$. (2 pont)

b) Alakítsuk át az egyenletet!

$$(x-1)^2 - y^2 = 11 \qquad \text{(1 pont)}$$

$$(x-1-y)(x-1+y) = 11 \qquad \text{(1 pont)}$$

A 11 két természetes szám szorzatára csak egyféleképpen bontható fel, $1 \cdot 11$, így a megoldást az

$$x-1-y=1$$
$$x-1+y=11$$

Egyenletrendszer megoldása adja. (2 pont)

(A másik párosítás esetén nem kapunk pozitív megoldást.)

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 7, y = 5$. (1 pont)

Összesen: **10 pont**

5. Egy csupa fiúból álló osztályban 18-an sakkoznak, 23-an fociznak, 21-en bicikliznek és 17-en túráznak. Tudjuk, hogy 9 olyan fiú van, aki sakkozik és focizik 7, aki sakkozik és biciklizik, 6, aki sakkozik és túrázik, 12, aki biciklizik és focizik, 9-en fociznak és túráznak és 12-en vannak, akik bicikliznek és túráznak is. A sakkot a biciklizést és a focit 4-en, a sakkot a focit és a túrázást 3-an, a sakkot a biciklizést és a túrázást 5-en, a focit a biciklizést és a túrázást 7-en tekintik kedvenc szabadidős elfoglaltságuknak. Van három olyan fiú, aki mindegyik sportnak hódol. Tudjuk végül, hogy a négy közül legalább az egyiket mindegyik fiú űzi. Hány fiú van az osztályban?

Megoldás:

Jelölje S a sakkozók halmazát, melynek számossága $|S| = 18$, F a focizók halmazát, melynek számossága $|F| = 23$, B a biciklizők halmazát, melynek számossága $|B| = 21$, T a túrázók halmazát, melynek számossága $|T| = 17$. (1 pont)

A feltételekben szereplő metszethalmazok számosságai: $|S \cap F| = 9$, $|S \cap B| = 7$, $|S \cap T| = 6$, $|B \cap F| = 12$, $|F \cap T| = 9$, $|B \cap T| = 12$, $|S \cap B \cap F| = 4$, $|S \cap F \cap T| = 3$, $|S \cap B \cap T| = 5$, $|F \cap B \cap T| = 7$, $|S \cap B \cap F \cap T| = 3$. (3 pont)

A négy halmaz egyesített halmazának számosságára a szitaformulát alkalmazva:

$$|S \cup B \cup F \cup T| = |S| + |F| + |B| + |T| - (|S \cap F| + |S \cap B| + |S \cap T| + |B \cap F| + |F \cap T| + |B \cap T|) +$$
$$|S \cap B \cap F| + |S \cap F \cap T| + |S \cap B \cap T| + |F \cap B \cap T| - |S \cap B \cap F \cap T| =$$

(4 pont)

$$= 18 + 23 + 21 + 17 - (9 + 7 + 6 + 12 + 9 + 12) + 4 + 3 + 5 + 7 - 3 = 40 \qquad \text{(1 pont)}$$

Az osztályba 40 fiú tanuló jár. (1 pont)

Összesen: **10 pont**

6. Tekintsük az $x^2+2(m-2)x+m^2-4m-21=0$ másodfokú egyenletet, ahol m valós paraméter.

a) Bizonyítsuk be, hogy az egyenlet valós gyökeinek különbsége nem függ m-től!

b) Határozzuk meg m azon értékét, melyre az egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege minimális!

Megoldás:

a) A megoldó képlet alapján:

$$x_{1;2}=\frac{-2m+4\pm\sqrt{4m^2-16m+16-4m^2+16m+84}}{2}=-m+2\pm5$$ (2 pont)

A két gyök különbsége ±10, ami független m-től. (2 pont)

b) Az a) rész alapján $D>0$, így minden m-re van valós gyöke az egyenletnek.

(2 pont)

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=[-2(m-2)]^2-2(m^2-4m-21)=$$

$$=4m^2-16m+16-2m^2+8m+42=2m^2-8m+58=2(m-2)^2+50$$ (3 pont)

A valós gyökök négyzetösszege akkor minimális, ha $m=2$. (1 pont)

Összesen: 10 pont

2. megoldás az a) részre:

A Viéte-formulák alapján:

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4(m-2)^2-4(m^2-4m-21)=100,$$

$$|x_1-x_2|=10.$$ (4 pont)

11. évfolyam technikum

Pontozási útmutató

1. Egy csokoládégyárban két gépsoron 2012. november 5-én kezdték el gyártani a 85 gramm tömegű csokimikulásokat. A gyártás utolsó fázisában megmérik minden csokimikulás tömegét és, ha annak tömege kevesebb, mint 83 gramm, akkor csomagolás nélkül visszakerül az olvasztóba. Az első nap a két gépsoron összesen 26400 csokimikulást gyártottak, amiből 636-ot nem csomagoltak be. Az egyik gépsoron gyártott mikulások 2%-a, míg a másikon gyártott mikulások 3%-a volt selejtes. Hány selejtes mikulást gyártottak az egyik, illetve a másik gépsoron?

Megoldás:

Jelölje az első gépsoron gyártott mikulások számát x, a másikon gyártottakét $26400-x$.
(1 pont)
A selejtek száma: $0{,}02\cdot x$, illetve $0{,}03\cdot(26400-x)$. (2 pont)
A feltételekből: $0{,}02\cdot x + 0{,}03\cdot(26400-x) = 636$. (1 pont)
Összevonás és rendezés után: $-0{,}01x = -156$ (2 pont)
Az első gépsoron gyártott mikulások száma 15600, a másodikon gyártottaké 10800
(1 pont)
Az első gépsoron gyártott selejtek száma $0{,}02\cdot 15600 = 312$ (1 pont)
A második gépsoron gyártott selejtek száma $0{,}03\cdot 10800 = 324$ (1 pont)
Ezek összege 636. (1 pont)
Összesen: **10 pont**

2. Egy banketten a meghívottak kézfogással üdvözlik egymást (mindenki mindenkivel pontosan egyszer fog kezet). Az üdvözlések során egy adott pillanatban kiderül, hogy még mindenkinek négy kézfogása van hátra és eddig 168 kézfogás történt. Hány résztvevője van a bankettnek?

Megoldás:

Ha n résztvevő van, akkor mindenki n - 1 kézfogást ad. (2 pont)
Mivel egy adott pillanatban mindenkinek még 4 kézfogása van hátra, ezért eddig mindenki $n-5$ kézfogást adott, így (3 pont)

$$\frac{n(n-5)}{2}=168$$ (2 pont)

$$n^2-5n-336=0$$ (1 pont)

Az egyenlet pozitív megoldása a 21.
Tehát 21 résztvevője van a bankettnek. (1 pont)
Ellenőrzés (1 pont)

Összesen: **10 pont**

3. Feldarabolható-e egy szabályos háromszög

a) 2022 szabályos háromszögre?

b) Bizonyítsuk be, hogy a szabályos háromszög felbontható 6, illetve 8 szabályos háromszögre is.

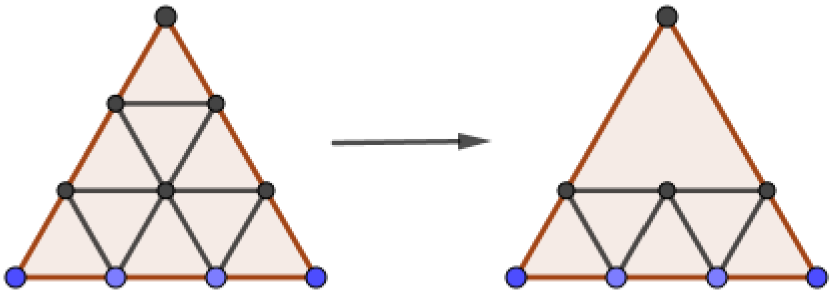
Megoldás:

a) Bármely szabályos háromszög az oldalfelező pontjait összekötő szakaszokkal négy szabályos háromszögre bontható, ami azt jelenti, hogy a felbontásban szereplő szabályos háromszögek száma 3-mal mindig növelhető. (2 pont)

Az oldalak harmadoló pontjait összekötve 9 szabályos háromszögre tudunk bontani egy szabályos háromszöget, ami 8-cal növeli a szabályos háromszögek számát egy felbontásban. (2 pont)

Így bármely szabályos háromszög biztosan felbontható 4, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18,…, 2022 szabályos háromszögre. (2 pont)

b) Az oldalak megfelelő harmadoló pontjait összekötve a kapott 9 szabályos háromszögből négyet egyesítve a hatra való bontás adódik, lásd ábra. (2 pont)



Hasonlóan az előzőhöz:

Osszuk fel a szabályos háromszög mindegyik oldalát 4 egyenlő részre és ezek közül a megfelelő pontokat összekötve látjuk, hogy 16 darab szabályos háromszögre felbontható a háromszög. Az egyik csúcsnál fekvő 9 darabot egynek tekintve összesen 8 háromszöget kapunk. (2 pont)

Megjegyzés: fentiekből adódik a 11 részre való bontás. Tehát 2, 3, és 5 kivételével minden pozitív egész szám lehet a darabolásnál kapott szabályos háromszögek száma.

Összesen: 10 pont

4. Adott az $\frac{a}{b}$ tört, ahol a, b pozitív egész számok. Ha a tört számlálóját 7-tel növeljük és a nevezőjét 7-tel csökkentjük, akkor az $\frac{a}{b}$ tört reciprokát kapjuk. Hány ilyen tört van, amelyre $\frac{b}{a} > \frac{290}{289}$?

Megoldás:

A megadott feltételek alapján felírható az $\frac{a+7}{b-7} = \frac{b}{a}$ egyenlet ($b \neq 7$), amelyből $a^2 + 7a = b^2 - 7b$ következik. (1 pont)

Ezt 0-ra rendezve az $a^2 - b^2 + 7(a + b) = 0$ egyenletet kapjuk, melynek bal oldala szorzattá alakítható:

(1) $(a + b) \cdot (a - b + 7) = 0.$ (2 pont)

Mivel az a, b pozitív egészek, ezért (1)-ből $a - b + 7 = 0$ adódik, azaz

(2) $b = a + 7$ (2 pont)

A $\frac{b}{a}$ törtet (2) segítségével a következő alakba írhatjuk: $\frac{b}{a} = \frac{a+7}{a} = 1 + \frac{7}{a}$. (1 pont)

Azoknak a pozitív egész a számoknak a számát keressük, melyekre $\frac{b}{a} = 1 + \frac{7}{a} > \frac{290}{289}$.

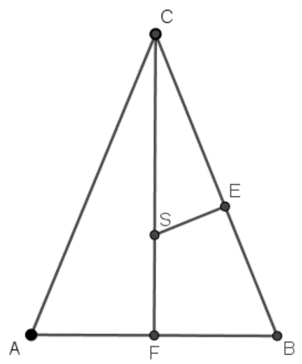
Az $1 + \frac{7}{a} > \frac{290}{289}$ egyenlőtlenségből adódik, hogy a < 2023 (2 pont)

Így összesen 2022 darab, a feladat feltételeinek megfelelő pozitív egész a szám van, (2) alapján ugyanennyi a megfelelő pozitív b számok száma is. (2 pont)

Összesen: **10 pont**

5. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 20 cm, szárai 26 cm hosszúak. Mekkora a súlypontnak a háromszög oldalaitól mért távolsága?

Megoldás:



Az AFC derékszögű háromszögben: $FC = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$ cm. S súlypont, ezért SF = 8 cm, és SC = 19 cm. (4 pont)

$SEC\Delta \sim BFC\Delta$, mert derékszögűek és egy szögük közös (2 pont)

Ezért $\frac{SE}{FB} = \frac{SC}{BC}$, ahonnan $SE = \frac{16 \cdot 10}{26} \approx 6{,}15$ cm. (4 pont)

Összesen: **10 pont**

6. Számítsa ki a

$$\frac{2022^2 - 2021^2 + 2020^2 - 2019^2 + \cdots + 2^2 - 1^2}{2022 - 2021 + 2020 - 2019 + \cdots + 2 - 1}$$

tört pontos értékét!

Megoldás:

A számláló tagjait párosítsuk és alakítsuk szorzattá a párokat:

$(2022 + 2021)(2022 - 2021) + (2020 + 2019)(2020 - 2019) + \cdots + (2 + 1)(2 - 1) = 4043 + 4039 + \cdots + 3 = \frac{4043+3}{2} 1011 = 2045253$ (6 pont)

A nevezőben 1011 egy értékű pár készíthető, így a nevező értéke 1011 (3 pont)
A tört pontos értéke: 2023 (1 pont)
Összesen: 10 pont

12. évfolyam gimnázium

Pontozási útmutató

1. Egy szabályos dobókockával ötször dobunk egymás után és sorban leírjuk a dobott pöttyök számát, ezzel így ötjegyű számsorozatot kapunk.

a) Hányféle számsorozatot kaphatunk?

b) Hányféle olyan sorozatot kaphatunk, melyekben pontosan egy kettes szerepel?

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első helyen, a többi helyen álló számtól különböző szám áll?

Megoldás:

a) Minden dobás hatféle lehet, így összesen 6^5 =7776 számsorozatot kaphatunk. (2 pont)

b) Az egy kettes helyére öt lehetőség van, a többi helyre öt számjegy kerülhet, így a feltételnek megfelelő számsorozatok száma: $5 \cdot 5^4 = 3125$ (3 pont)

c) Az első helyen hatféle számjegy állhat, míg a többi helyen ötféle szám. (1 pont)
Ezért a kedvező esetek száma $6 \cdot 5^4 = 3750$. (2 pont)

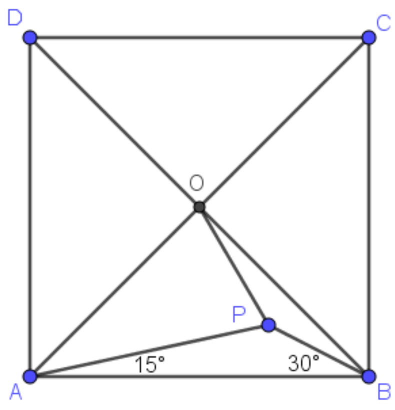
A kérdéses valószínűség $P = \frac{6 \cdot 5^4}{6^5} = 0{,}482$ (2 pont)

Összesen: 10 pont

2. Az egységnyi oldalú *ABCD* négyzet belső *P* pontjára teljesül, hogy $PAB\angle = 15^{\circ}$ és $PBA\angle = 30^{\circ}$. A négyzet középpontját *O*-val jelölve, mekkorák *az APO* háromszög szögei?

Megoldás:

Készítsünk megfelelő ábrát!



Jó ábráért. (1 pont)

A feltételek miatt az *APB* szög 135°. (1 pont)

Írjuk fel a szinusztételt az ABP háromszögre: $AP : a = \sin 30^\circ : \sin 135^\circ$. (Az $ABCD$ oldalhosszát jelöle a.) (3 pont)

Felhasználva, hogy $\sin 30^\circ = 0{,}5$, $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért $AP = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ (2 pont)

Ugyanakkor $AO = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ (a négyzet átlójának a fele), így APO háromszög egyenlő szárú. (2 pont)

Mivel PAO szög 30°, APO szög 75° és POA szög 75°. (1 pont)

Összesen: 10 pont

3. Az ABC háromszög C csúcsból induló belső szögfelezője illeszkedik az $y = x$ egyenesre. Határozzuk meg a háromszög C csúcsának koordinátáit, ha $A(12;-1)$ és $B(6;14)$!

Megoldás:

Ha a C csúcsból induló szögfelezőre tükrözzük az A, illetve a B csúcsot, akkor A' illeszkedik a BC oldal egyenesére, illetve B' illeszkedik a AC oldal egyenesére (2 pont)

Mivel a C-ből induló szögfelező illeszkedik az $y = x$ egyenesre, ezért $A'(-1;12)$, $B'(14;6)$. (2 pont)

Az $A'B$ egyenes és a $y = x$ egyenes metszéspontja adja a C pontot. (1 pont)

$A'B$ egyenes egyenlete: $\mathbf{v}_{BC} = (7;2)$: $2x - 7y = -86$, így (2 pont)

Az egyenletrendszer megoldása:

$$-5y = -86,\ y = \frac{86}{5},\ x = \frac{86}{5}$$ (2 pont)

Tehát a keresett $C\left(\frac{86}{5};\frac{86}{5}\right)$. (1 pont)

Összesen: 10 pont

4. Tekintsük az $f: R \to R,\ f(x) = (p-2)x^2 + (2p+1)x + \frac{3}{4}p + 2$ másodfokú függvényeket, ahol p 2-től különböző valós szám.

a) Van-e a p paraméternek olyan értéke, amelyre a másodfokú függvénynek nincs közös pontja az x tengellyel?

b) Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyekre a p lehetséges értékeihez tartozó függvények mindegyike illeszkednek!

c) Határozzuk meg p értékét úgy, hogy a $(p-2)x^2 + (2p+1)x + \frac{3}{4}p + 2 = 0$ egyenlet gyökeinek a négyzetösszege $\frac{5}{2}$ legyen!

Megoldás:

a) Írjuk fel a másodfokú kifejezés diszkriminánsát!

$$D=(2p+1)^2-4(p-2)\left(\frac{3}{4}p+2\right)=4p^2+4p+1-3p^2-2p+16=p^2+2p+17=$$

$$(p+1)^2+16$$

Ez minden *p* értékre pozitív, ami azt jelenti, hogy az *f* függvénynek mindig két zérus helye van. Tehát nincs olyan p, amelyre nincs közös pont az x tengellyel. (3 pont)

b) *f*(*x*)-et rendezzük *p*-re!

$$f(x)=\left(x^2+2x+\frac{3}{4}\right)p-2x^2+x+2,$$ (1 pont)

ami akkor független *p*-től, ha *p* együtthatója 0, azaz $x^2+2x+\frac{3}{4}=0$ esetén.

Ez $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=-\frac{3}{2}$ esetén teljesül (2 pont)

A keresett pontok: $P_1\left(-\frac{1}{2};1\right), P_2\left(-\frac{3}{2};-4\right)$. (1 pont)

c) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{2p+1}{p-2}\right)^2-2\frac{\frac{3}{4}p+2}{p-2}=\frac{\frac{5}{2}p^2+3p+9}{(p-2)^2}=\frac{5}{2}$

Ahonnan $p=\frac{1}{13}$. (3 pont)

Összesen: **10 pont**

5. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet!

$$\left(\sin^2 x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y^2+\cos x\right)^2=0$$

Megoldás:

Két nemnegatív szám összege csak úgy lehet 0, ha mindkettő 0. (1 pont)

A $\left(\sin^2 x-\frac{1}{4}\right)^2=0$, ha |sin*x*| = 0,5, ekkor $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, vagy $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. (3 pont)

Az $\left(y^2+\cos x\right)=0$ miatt csak a $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ lehetséges,

az ehhez tartozó *x* értékek: (2 pont)

$x_1=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,\quad x_2=\frac{7\pi}{6}+l2\pi$, ahol *k, l* egész számok. (2 pont)

Minden *x* értékhez két *y* érték tartozik, amik $y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. (2 pont)

Összesen: **10 pont**

6. Hány olyan x valós szám van, amelyre a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1024} - \sqrt{x^2 + 1}$$

függvény egész értéket vesz fel?

Megoldás:

Alakítsuk át az $f(x)$ függvényt a számláló gyöktelenítésével:

$$f(x) = \left(\sqrt{x^2 + 1024} - \sqrt{x^2 + 1}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1024} + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1024} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1023}{\sqrt{x^2 + 1024} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

(4 pont)

Az $f(x)$ páros függvény, mert $f(x) = f(-x)$. (2 pont)

Ha $x > 0$, akkor a függvény szigorúan monoton csökken, $x = 0$ esetén a függvénynek maximuma van. $f(0) = 31$. (2 pont)

Mivel $f(x) > 0$, a lehetséges egész függvényértékek: 1, 2, 3, … ,30 (ezeket két helyen veszi fel a függvény) és a 31. (1 pont)

Tehát összesen 2*30 + 1 = 61 helyen vesz fel a függvény egész értéket. (1 pont)

Összesen: 10 pont

12. évfolyam technikum

Pontozási útmutató

1. Határozzuk meg azokat a háromjegyű számokat, amelyek egyenlők számjegyei összegének a 23-szorosával.

Megoldás:

Írjuk fel a feltételt a helyi értékekkel:

$$100a + 10b + c = 23(a + b + c)\,. \qquad \text{(2 pont)}$$

Rendezzük az egyenletet a következő alakra:

$$11(7a - 2c) = 13b \qquad \text{(2 pont)}$$

Mivel (11;13) = 1, ezért 11|*b*. tekintettel arra, hogy *b* számjegy, *b* = 0. Amiből (2 pont)

$7a - 2c = 0$ következik. (1 pont)

Figyelembe véve a feltételeket ez az egyenlőség, csak *c* = 7 és *a* = 2 esetén teljesül.
(2 pont)

Ellenőrzés. (1 pont)

Válasz: A feltételeknek egyetlen háromjegyű szám felel meg, a 207.

Összesen: 10 pont

2. Egy banketten a meghívottak kézfogással üdvözlik egymást (mindenki mindenkivel pontosan egyszer fogott kezet). Két meghívott más elfoglaltsága miatt nem tudott részt venni a banketten, így a lehetséges kézfogások száma 35-tel csökkent. Hány embert hívtak meg a bankettre?

Megoldás:

Ha a két lemondás után *n* résztvevő maradt, akkor mindenki *n* - 1 kézfogást adott, s ez összesen $\frac{n(n-1)}{2}$ kézfogás. (2 pont)

Eredetileg *n* + 2 résztvevő volt, ez $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ kézfogást jelent. (1 pont)

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + 35 \qquad \text{(3 pont)}$$

$$(n+2)(n+1) = n(n-1) + 70 \qquad \text{(1 pont)}$$

$$n^2 + 3n + 2 = n^2 - n + 70$$

$$4n = 68 \qquad \text{(1 pont)}$$

$$n = 17$$

Tehát 19 meghívott volt a bankettre. (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

Összesen: 10 pont

3. Egy szabályos dobókockával ötször dobunk egymás után és sorba leírjuk a dobott pöttyök számát, így ötjegyű számsorozatot kapunk.

a) Hányféle számsorozatot kaphatunk?

b) Hányféle sorozatot kaphatunk, melyekben pontosan egy kettes szerepel?

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első helyen, a többi helyen álló számtól különböző szám áll?

<u>Megoldás:</u>

a) Minden dobás hatféle lehet, így összesen 6^5 =7776 számsorozatot kaphatunk. (2 pont)

b) Az egy kettes helyére öt lehetőség van, a többi helyre öt számjegy kerülhet, így a feltételnek megfelelő számsorozatok száma: $5 \cdot 5^4 = 3125$ (3 pont)

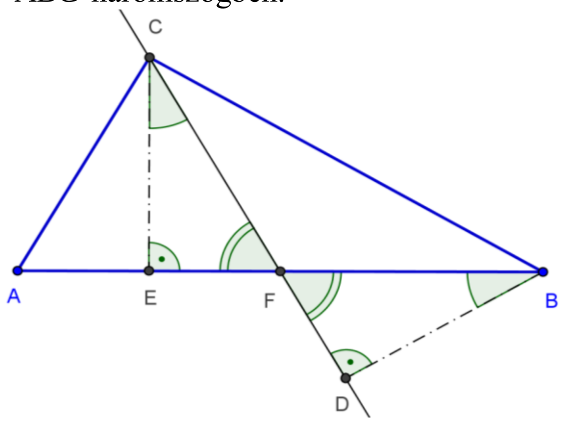
c) Az első helyen hatféle számjegy állhat, míg a többi helyen ötféle szám. (1 pont)
Ezért a kedvező esetek száma $6 \cdot 5^4 = 3750$. (2 pont)

A kérdéses valószínűség $P = \dfrac{6 \cdot 5^4}{6^5} = 0{,}482$ (2 pont)

Összesen: **10 pont**

4. Az ABC háromszögben az AB oldal kétszer olyan hosszúságú, mint az AC oldal. Tudjuk, hogy a C pont ugyanolyan távol van az AB oldal egyenesétől, mint a B pont a C pontból induló súlyvonal egyenesétől. Mekkorák az ABC háromszög szögei?

<u>Megoldás:</u> A feltételeknek megfelelő ábrát készítettünk, ahol F az AB oldal felezőpontja, és így CF egyenese súlyvonal az ABC háromszögben.



(1 pont)

A CFE és BFD háromszögek szögei egyenlők, mert a két háromszögben van egy-egy derékszög és a $CFE\angle$ illetve a $BFD\angle$ csúcsszögek, tehát egyenlők, ebből következően a két háromszög harmadik szögei is egyenlők, hiszen minden háromszögben a belső szögek összege $180°$. (1 pont)

A feltételek szerint $CE = BD$, így a CFE és BFD háromszögekben egy-egy megfelelő szöggel szemközti oldal hosszúsága is megegyezik, ezért a két háromszög egybevágó, tehát a többi megfelelő oldal hosszúsága is egyenlő.

Ezek szerint például $CF = BF$, vagyis a BCF háromszög egyenlő szárú. (2 pont)

Ugyanakkor az $AB = 2 \cdot AC$ feltételből $AF = AC$ illetve $AF = BF$ következik, de $CF = BF$ miatt azt kapjuk, hogy $AF = AC = CF$ is teljesül, vagyis az AFC háromszög

szabályos, amelynek szögei $60°$-osak. (2 pont)
Ezért $AFC\angle = 60°$, ez a szög egyúttal külső szöge a BCF háromszögnek, amely a fentiek szerint egyenlő szárú. A külső szögekre vonatkozó tétel szerint ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $FBC\angle = FCB\angle = 30°$. (2 pont)
Így az ABC háromszög szögei a következők: $ABC\angle = 30°$; $BAC\angle = 60°$, végül $ACB\angle = 90°$. (2 pont)
Összesen: 10 pont

5. Háromszögszámoknak nevezzük a $h_1 = 1,\ h_2 = 1+2,\ h_3 = 1+2+3,\ \ldots,\ h_n = 1+2+3+\ldots+n$, stb. számokat. Számítsuk ki az első 2022 háromszögszám reciprokának az összegét!

Megoldás:

A $h_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ n-edik háromszögszám zártalakja. (2 pont)

A zártalak segítségével az összeget felírva:

$$S = 2\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2022\cdot 2023}\right)$$ (2 pont)

Felhasználva, hogy $\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ (2 pont)

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} =$$ (2 pont)

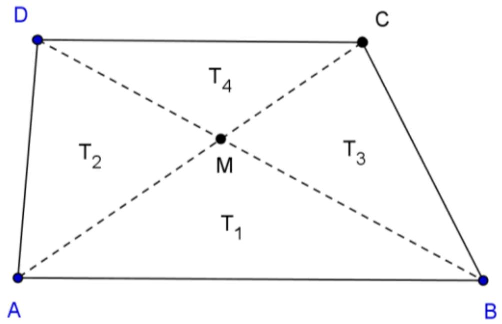
$$= 2\cdot\left(1 - \frac{1}{2023}\right) = \frac{4044}{2023}$$ (2 pont)

Összesen: 10 pont

6. Az $ABCD$ trapéz AC és BD átlói az M pontban metszik egymást. Az ABM és ADM háromszögek területének aránya 8 : 7. Mekkora a trapéz területe, ha a CDM háromszög területe 2023 területegység?

Megoldás:

Jelöléseink az ábrán láthatók.



(1 pont)
A feltételek szerint $T_1 : T_2 = 8 : 7$, ezért $T_1 = (8 : 7)\cdot T_2$. (1 pont)
Mivel az ABC és ABD háromszögek AB alapja és az ehhez tartozó magasságuk az AB és CD szakaszok párhuzamossága miatt egyenlő, ezért $T_1 + T_2 = T_1 + T_3$, azaz $T_2 = T_3$, tehát az ADM és BCM háromszögek területe egyenlő. (2 pont)
Az ABM és ADM háromszögek területének aránya megegyezik a BM és DM szakaszok arányával, hiszen a két háromszög ezen oldalakhoz tartozó magassága egyenlő. Ez azt is jelenti, hogy $BM : DM = 8 : 7$. (1 pont)

Ugyanakkor $T_3 : T_4 = 8 : 7$ is fennáll, mert a BCM és CDM háromszögek BM és DM szakaszokhoz tartozó magassága ugyancsak egyenlő. Eszerint $T_2 = T_3 = (8 : 7) \cdot T_4$. (1 pont)

Tudjuk, hogy $T_4 = 2023$, ezért $T_2 = T_3 = (8 : 7) \cdot 2023 = 2312$, területegység. A $T_1 = (8 : 7) \cdot T_2 = 2642\frac{2}{7}$ területegység. (2 pont)

Az $ABCD$ trapéz területe tehát $T_1 + 2 \cdot T_2 + T_4 = 2642\frac{2}{7} + 4624 + 2023 = 9289\frac{2}{7}$ területegység. (2 pont)

Összesen: **10 pont**